Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 6, с. 401 – 403 

# Качественное рассмотрение эффекта Шарнхорста

*А. М. Ишханян*[+*], *В. П. Крайнов*[×1)]

[+]*Российско-Армянский университет, 0051 Ереван, Армения*

[*]*Институт физических исследований НАН Армении, 0203 Аштарак, Армения*

[×]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 29 декабря 2021 г.
После переработки 21 января 2022 г.
Принята к публикации 17 февраля 2022 г.

Эффект Шарнхорста состоит в том, что фотон, летящий поперек щели между большими параллельными друг другу проводящими пластинами, имеет скорость, немного превышающую скорость света в вакууме вследствие поляризации системы. В статье приводится качественное рассмотрение этого эффекта.

DOI: 10.31857/S123456782206009X

**1. Введение.** Флуктуационное поле электромагнитного вакуума проявляет себя в самых различных задачах [1–5]. Так, ван-дер-ваальсово притяжение между атомами и молекулами на расстояниях $R$, больших по сравнению с размерами атомов и молекул, есть следствие различных электромагнитных сил между телами. Эти силы обусловлены как непосредственным взаимодействием зарядов, так и полем электромагнитного вакуума. В случае $R \gg a_B/\alpha$, где $a_B$ – боровский радиус, а $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, притяжение между атомами создается именно полем электромагнитного вакуума, которое производит поляризацию атомов [2, 3], а не кулоновскими силами.

Другой пример – это лэмбовский сдвиг в атоме водорода [4]. Сдвиг энергии основного состояния атома водорода в $\alpha^3$ раз меньше его энергии из-за "дрожания" электрона [5] в поле электромагнитного вакуума (если не учитывать слабый логарифмический фактор). Квадрат напряженности электрического поля вакуума оценивается как отношение лэмбовского сдвига к объему атома водорода. Эта напряженность имеет порядок величины $10^6$ В/см.

Третий пример – это притяжение проводящих пластин, параллельных друг другу, силами электромагнитного вакуума (сила Казимира [4]). Поляризация системы в этой задаче и рассматривается в данной статье.

**2. Флуктуационное поле в задаче Казимира.** Сначала приведем упрощенный вывод энергии Казимира электромагнитного вакуума между двумя параллельными проводящими пластинами (расстояние между пластинами равно $a$). Используем систему единиц $c = \hbar = m = 1$. Рассмотрим кубик с длиной грани $L \gg a$, ограниченный со всех сторон проводящими пластинами. Без ограничения общности можно считать $L = 1$. Все осцилляторы поля электромагнитного вакуума находятся в основном состоянии и энергия каждого осциллятора равна $\omega/2$. Обсудим возможные длины стоячих волн в этом кубике. Максимальная длина волны, например, вдоль направления $X$, равна 2 (т.е., на длине грани кубика укладывается полволны поперечного электрического поля осциллятора, чтобы оно обращалось в нуль на проводящих пластинах по известному условию для тангенциальных компонент поля). А произвольная длина волны в этом направлении равна $\lambda_n = 2/n_x$, где $n_x$ – целое неотрицательное число. Соответствующее волновое число равно $k_x = 2\pi/\lambda_n = \pi n_x$, $n_x = 0, 1, 2, 3\ldots$ Следовательно, частота осциллятора $\omega = \pi\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$. Полная энергия поля электромагнитного вакуума в кубике равна сумме энергий осцилляторов

$$\varepsilon_0 = \pi \sum_{n_x, n_y, n_z}^{\infty} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dk_x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_z}{\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \qquad (1)$$

Дополнительный фактор 2 возник из-за двух поперечных поляризаций каждого фотона.

Теперь поместим еще одну проводящую пластину перпендикулярно оси $Z$ на малом расстоянии $a \ll 1$

[1)]e-mail: vpkrainov@mail.ru

от верхней плоскости рассматриваемого кубика. Вычислим энергию $\varepsilon(a)$ электромагнитного вакуума, заключенную в малой области между этой пластиной и верхней плоскостью кубика. Аналогично (1) имеем

$$\varepsilon(a) = \int_0^\infty \frac{dk_x}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_y}{\pi} \sum_{n_z=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dk_x}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_y}{\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (2)$$

Второе слагаемое в (2) отвечает значению $n_z = 0$. Фактор $1/2$ в этом слагаемом обусловлен тем, что при движении в двухмерной плоскости имеется только одна поляризация фотона. Вводя полярные координаты в плоскости $(x, y)$ и обозначая $\kappa = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, перепишем выражение (2) в виде

$$\varepsilon(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa d\kappa \left\{ \sum_{n_z=1}^{\infty} \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2} + \frac{\kappa}{2} \right\}. \quad (3)$$

В соответствии с (3) характерная длина волны фотона в задаче Казимира порядка размера щели $a$. Коротковолновые фотоны устраняются при последующем вычитании энергии в отсутствие пластин.

Если проводящая пластина отсутствует, то энергия поля электромагнитного вакуума в том же малом объеме, очевидно, равна $\varepsilon_0(a) = a\varepsilon_0$. Подставляя (1) и заменяя $\kappa^2 = u$, получим

$$\varepsilon_0(a) = \frac{a}{4\pi^2} \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty du \sqrt{u + k_z^2}. \quad (4)$$

Заменяя $k_z = \pi n_z / a$, перепишем (4) в виде

$$\varepsilon_0(a) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dn_z \int_0^\infty du \sqrt{u + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2}. \quad (5)$$

Вычисляя элементарный интеграл в (5), находим

$$\varepsilon_0(a) = \frac{1}{6\pi} \int_0^\infty dn_z \left\{ A^{3/2} - \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^3 \right\}; \ A \to \infty. \quad (6)$$

Величина $A$ – верхний предел интегрирования по переменной $u$. Аналогично вычисляем интеграл (3) по $u$:

$$\varepsilon(a) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty du \left\{ \sum_{n_z=0}^{\infty} \sqrt{u + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2} - \frac{\sqrt{u}}{2} \right\} = \\ = \frac{1}{6\pi} \left\{ \sum_{n_z=0}^{\infty} \left[ A^{3/2} - \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^3 \right] - \frac{A^{3/2}}{2} \right\}. \quad (7)$$

Для вычисления суммы в (7) используем формулу Эйлера–Маклорена

$$\sum_{n_z=0}^{\infty} f(n_z) \approx \int_0^\infty f(n_z) dn_z + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0). \quad (8)$$

В данном случае

$$f(n_z) = A^{3/2} - \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^3. \quad (9)$$

Следовательно,

$$f(0) = A^{3/2}; \ \ f'(0) = f''(0) = 0; \ \ f'''(0) = -6\pi^3/a^3. \quad (10)$$

Изменение энергии поля при внесении в кубик проводящей пластины равно $\Delta\varepsilon = \varepsilon(a) - \varepsilon_0(a)$. Оно обусловлено квантованием поля вдоль оси $Z$ и порождает силу, действующую между внесенной пластиной и пластиной на верхней плоскости кубика. Из формул (6)–(10) видно, что при вычитании происходит взаимоуничтожение слагаемых $\int_0^\infty f(n_z) dn_z + \frac{1}{2} f(0)$ в формуле Эйлера–Маклорена. При этом исчезает произвольное большое число $A$. Получаем

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\pi^2 c\hbar L^2}{720 a^3}. \quad (11)$$

Плотность энергии Казимира согласно (11) равна

$$W = -\frac{\pi^2 c\hbar}{720 a^4}. \quad (12)$$

Далее в качественном подходе мы опустим все численные факторы в зависимостях, сохраняя знаки равенства вместо знака "равно по порядку величины". Плотность энергии Казимира (12) равна квадрату напряженности $E$ флуктуационного электрического поля электромагнитного вакуума. Таким образом, получаем $E = \sqrt{c\hbar}/a^2$. Например, для полости с шириной $a = 1$ мкм, восстанавливая размерности, получим $E = 100$ В/см. Конечно, электрическое поле различно на разных длинах волн. В соответствии со сказанным выше эта оценка относится к длине волны порядка размера щели.

**3. Ненулевые температуры.** Теперь обратимся к случаю ненулевой температуры [6]. В этом случае энергия осциллятора равна

$$\varepsilon(\omega) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\omega/T) - 1} \right) \omega. \quad (13)$$

Она получается из квантово-механической энергии осциллятора $(n + 1/2)\omega$ подстановкой ее в распределение Гиббса и суммированием по квантовым числам $n$.

Мы рассматриваем идеальный газ фотонов вакуума с нулевым химическим потенциалом как совокупность независимых частиц, помещенных в термостат с температурой $T$. Под этими частицами мы понимаем частицы бозе-газа, находящихся в данном одночастичном квантовом состоянии, а под термостатом – остальной газ. Таким образом, малая температурная поправка к энергии при $T \ll 1/a$ на основе (4) определяется вторым слагаемым в (13), т.е.

$$\delta\varepsilon_0(a,T) = \frac{a}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty dk_z \int\limits_0^\infty d\kappa \frac{\kappa\sqrt{\kappa^2+k_z^2}}{\exp\left\{\frac{\hbar c}{T}\sqrt{\kappa^2+k_z^2}\right\}-1}. \tag{14}$$

Переходим в (14) к новым полярным координатам $\kappa = k\sin\alpha$; $k_z = k\cos\alpha$. Тогда получаем

$$\delta\varepsilon_0(a,T) = \frac{a}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{k^3dk}{\exp\left\{\frac{\hbar ck}{T}\right\}-1}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha. \tag{15}$$

Вычисляя, находим температурную поправку к энергии:

$$\delta\varepsilon_0(a,T) = \frac{\pi^2 aT^4}{30}. \tag{16}$$

Для (безразмерной) теплоемкости электромагнитного вакуума, заключенного в области между пластинами, получаем:

$$C(T) = \frac{2\pi^2}{15}\left(\frac{T}{T_0}\right)^3\left(\frac{L}{a}\right)^2; \;\; T \ll T_0 = \frac{\hbar c}{a}. \tag{17}$$

Отметим аналогию (17) с теплоемкостью кристалла при низких температурах. Величина $a$ в кристалле – это постоянная решетки, а $T_0$ – дебаевская температура.

**4. Поляризация вакуума.** Под действием низкочастотного флуктуационного электрического поля электромагнитного вакуума электроны могут виртуально переходить из нижнего континуума ("моря Дирака") в верхний континуум через щель в спектре и обратно. В результате релятивистски инвариантная плотность лагранжиана электромагнитного поля $L = (E^2 - H^2)/8\pi$ приобретает малую добавку (так называемый эффективный лагранжиан Гейзенберга–Эйлера [4, 7]). Эта добавка квадратична по релятивистским инвариантам, т.е. содержит линейную комбинацию $(E^2 - H^2)^2$ и $(\mathbf{EH})^2$. Она носит общий характер и не связана с конкретными задачами.

Качественно такую малую радиационную поправку к плотности энергии Казимира (12) из-за поляризации вакуума можно записать в виде $\delta W = -e^4E^4$. Остальные факторы порядка единицы в используемой системе единиц $c = \hbar = m = 1$. Она отрицательна из-за отрицательности поправки к энергии во втором порядке теории возмущений для основного состояния. Определяем поляризацию (дипольный момент единицы объема) $P = \partial(\delta W)/\partial E = -e^4E^3$ и диэлектрическую восприимчивость $\chi = \partial P/\partial E = -e^4E^2$. Показатель преломления равен корню из диэлектрической проницаемости. Поэтому полученная величина представляет собой малое отклонение показателя преломления от единицы: $\Delta n = -e^4E^2 = -e^4/a^4$.

Речь идет о показателе преломления поперек щели. Вдоль щели показатель преломления строго равен единице в соответствии с лоренцевой инвариантностью к трансляции. Восстанавливая обычные единицы, получим:

$$\Delta n = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{mca}\right)^4. \tag{18}$$

Для ширины щели в полости $a = 1$ мкм отсюда получим оценку $\Delta n = -10^{-34}$. В расчете всех поправок второго порядка теории возмущений Шарнхорстом [1] и (другим способом) Бартоном [8] численный фактор в (18) оказался равным 0.013.

Из (18) получаем, что фотон, летящий поперек щели, имеет скорость несколько больше, чем скорость света в вакууме (эффект Шарнхорста), хотя это превышение ничтожно мало. Конечно, речь идет здесь о фазовой скорости. Для фактического распространения такой волны ее длина должна быть меньше ширины щели $a$, но, разумеется, много больше, чем для комптоновской волны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 20-52-05012), Комитета по науке Армении (грант # 20RF-171) и Армянского национального фонда науки и образования (грант # PS-5701). Работа поддержана Министерством науки и Высшего образования РФ (# FSMG-2021-0005).

1. K. Scharnhorst, Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).
2. Ю. С. Бараш, *Силы Ван-дер-Ваальса*, Наука, М. (1988).
3. А. М. Ишханян, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **159**, 1013 (2021).
4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, 4-е изд., Физматлит, М. (2002).
5. А. Б. Мигдал, В. П. Крайнов, *Приближенные методы квантовой механики*, Наука, М. (1966).
6. Sh.-I. Tadaki and Sh. Takagi, Progress of Theoretical Physics **75**, 262 (1986).
7. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
8. G. Barton, Phys. Lett. B **237**, 559 (1990).