

Массы легких кварков в теории с динамическим нарушением киральной симметрии¹⁾

А. А. Осипов²⁾

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 31 января 2022 г.

После переработки 15 февраля 2022 г.

Принята к публикации 26 февраля 2022 г.

Массовые формулы и константы распада псевдоскалярных π и K мезонов получены в теории с четырехкварковыми взаимодействиями. Для вычисления кваркового детерминанта впервые используется ряд Вольтерры, позволяющий учесть неравенство конституентных масс кварков $M_u \neq M_d \neq M_s$ в разложении эффективного действия по степеням $1/M^2$. Дополнительно полагаем, что массы легких кварков $m_i \sim \mathcal{O}(1/N_c)$. Показано, что теория не только воспроизводит известные неравенства для отношений масс легких кварков, но и позволяет вычислить ряд величин, характеризующих степень нарушения киральной симметрии.

DOI: 10.31857/S1234567822060015

1. Введение. Квантовая хромодинамика (КХД), если пренебречь массами легких u , d , и s кварков, на классическом уровне обладает киральной $U(3)_L \times U(3)_R$ симметрией, которая при низких энергиях спонтанно нарушена до $SU(3)_f \times U(1)_V$ подгруппы. Это приводит к появлению в спектре теории нонета безмассовых голдстоуновских бозонов (теорема Голдстоуна). Отличные от нуля массы легких кварков $m_u \neq m_d \neq m_s$ явно нарушают ароматическую $SU(3)_f$ симметрию. В результате голдстоуновские частицы приобретают ненулевые массы.

Техника алгебры токов позволяет связать массы псевдоскалярных мезонов, входящие в соотношение Гелл-Манна–Оакса–Реннера, с отношением масс легких кварков

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{\bar{\mu}_{K^+}^2 - \bar{\mu}_{K^0}^2 + \bar{\mu}_{\pi^+}^2}{\bar{\mu}_{K^0}^2 - \bar{\mu}_{K^+}^2 + \bar{\mu}_{\pi^+}^2} \equiv R_x, \quad (1)$$

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{\bar{\mu}_{K^+}^2 + \bar{\mu}_{K^0}^2 - \bar{\mu}_{\pi^+}^2}{\bar{\mu}_{K^0}^2 - \bar{\mu}_{K^+}^2 + \bar{\mu}_{\pi^+}^2} \equiv R_y, \quad (2)$$

где $\bar{\mu}_{\pi^+}^2 = B_0(m_u + m_d)$, $\bar{\mu}_{K^+}^2 = B_0(m_u + m_s)$, $\bar{\mu}_{K^0}^2 = B_0(m_d + m_s)$ – массы мезонов при выключенном электромагнитном взаимодействии, а коэффициент пропорциональности $B_0 = |\langle \bar{q}q \rangle_0|/F^2$ определяется величиной кваркового конденсата. Размерная константа $F \simeq 90$ МэВ.

Учет электромагнитных взаимодействий увеличивает массы заряженных состояний:

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: aaosipov@jinr.ru

$$\mu_{\pi^+}^2 = \bar{\mu}_{\pi^+}^2 + \Delta_{el}^2, \quad \mu_{\pi^0}^2 = \bar{\mu}_{\pi^+}^2 = \bar{\mu}_{\pi^0}^2, \quad (3)$$

$$\mu_{K^+}^2 = \bar{\mu}_{K^+}^2 + \tilde{\Delta}_{el}^2, \quad \mu_{K^0}^2 = \bar{\mu}_{K^0}^2. \quad (4)$$

Разница в массах заряженного и нейтрального пионов обусловлена в основном электромагнитным взаимодействием. Вклад сильных взаимодействий пропорционален разности $(m_d - m_u)^2$ и поэтому пренебрежимо мал.

Если воспользоваться теоремой Дашена [1]

$$\Delta_{el}^2 = \tilde{\Delta}_{el}^2, \quad (5)$$

которая является строгим результатом для алгебры токов, то приходим к хорошо известному результату Вайнберга [2]

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{2\mu_{\pi^0}^2 - \mu_{\pi^+}^2 + \mu_{K^+}^2 - \mu_{K^0}^2}{\mu_{K^0}^2 - \mu_{K^+}^2 + \mu_{\pi^+}^2} = 0.56, \quad (6)$$

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{\mu_{K^+}^2 + \mu_{K^0}^2 - \mu_{\pi^+}^2}{\mu_{K^0}^2 - \mu_{K^+}^2 + \mu_{\pi^+}^2} = 20.18. \quad (7)$$

В работе [3] была построена эффективная теория, использующая одновременное разложение по массе легких кварков, импульсам и $1/N_c$, где N_c – число цветовых степеней свободы. Это позволило вычислить первую поправку к результату Вайнберга и, в итоге, превратило уравнения (6) и (7) в неравенства

$$\frac{m_u}{m_d} > \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} \equiv R_{xD}, \quad (8)$$

$$\frac{m_s}{m_d} < \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} \equiv R_{yD}, \quad (9)$$

где физические массы псевдоскалярных мезонов $m_{\pi^0}, m_{\pi^+}, m_{K^0}, m_{K^+}$ включают, как вышеуказанную первую поправку, так и электромагнитный вклад виртуальных фотонов $\sim e^2$ (здесь и в дальнейшем индексом D обозначаются выражения, при получении которых использовалась теорема Дашена).

Целью настоящей работы является изучение механизма нарушения киральной симметрии в КХД при низких энергиях. Его специфика состоит в том, что имеют место сразу два процесса: явное нарушение киральной симметрии посредством ненулевых масс легких кварков, и накладывающийся на эту картину процесс спонтанного нарушения симметрии. Последний ведет к возникновению щели в спектре фермионов, т.е., появлению тяжелых конститuentных кварков. Как известно, четырехкварковые взаимодействия типа Намбу–Иона–Лазинио (НИЛ) [4, 5] могут отвечать за данный процесс. Бозонизация такой теории связана с задачей вычисления детерминанта оператора Дирака с диагональной массовой матрицей, элементы которой не равны и значительно превышают массы легких кварков. Именно для таких случаев недавно был предложен математический формализм [6–8], основанный на методе собственного времени Фока–Швингера [9–11] и разложении в ряд Вольтерры. До сих пор для этой цели традиционно применялся ряд Тэйлора.

В этой связи следует отметить, что задача вычисления масс псевдоскалярных мезонов является отличным тестом для проверки эффективности нового асимптотического разложения, поскольку известно, что результат такого разложения существенно отличается от результата, полученного посредством тейлоровского ряда. Это касается как массовых формул, так и остальных низкоэнергетических характеристик псевдоскалярных мезонов. Ниже будет показано, что предложенный здесь формализм воспроизводит как формулы Вайнберга (6), (7), так и неравенства Лойтвиллера (8), (9). Более того, он позволяет вычислить ряд физических величин, характеризующих явное нарушение киральной симметрии, что важно для проверки предсказательной силы теории.

2. Модель. Лагранжиан с четырехкварковыми взаимодействиями широко используется для описания механизма спонтанного нарушения киральной симметрии и получения эффективного мезонного действия при низких энергиях [12–15]

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (10)$$

Здесь γ^μ – матрицы Дирака, q – кварковые поля, а m – диагональная матрица $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, содержащая токовые массы u, d и s кварков. Плотность

Лагранжа, описывающая четырехкварковые взаимодействия, имеет вид $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}$, где сумма состоит из кирально симметричных комбинаций со спином ноль и единица соответственно

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{G_S}{2} [(\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \lambda_a q)^2], \quad (11)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{G_V}{2} [(\bar{q}\gamma^\mu \lambda_a q)^2 + (\bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \lambda_a q)^2], \quad (12)$$

где матрица $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$, а λ_i – матрицы Гелл-Манна. Каждое из двух слагаемых в \mathcal{L}_{int} инвариантно относительно преобразований группы $U(3)_L \times U(3)_R$.

Используя метод функционального интеграла, лагранжеву плотность (10) можно эквивалентно представить в виде

$$\mathcal{L}' = \bar{Q}(i\gamma^\mu d_\mu - M + \sigma)Q + \frac{1}{4G_V} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) - \frac{1}{4G_S} \text{tr}(\sigma^2 - \{\sigma, M\} + (\sigma - M)\Sigma), \quad (13)$$

где мы воспользовались функциональной свободой выбора динамических переменных в пользу нелинейной реализации киральной симметрии. При этом векторные, аксиально-векторные, скалярные и псевдоскалярные поля описываются эрмитовыми матрицами $V_\mu = V_\mu^a \lambda_a$, $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$, $\sigma = \sigma_a \lambda_a$, $\phi = \phi_a \lambda_a$,

$$Q = (\xi P_R + \xi^\dagger P_L)q, \quad (14)$$

$$d_\mu = \partial_\mu - i \left[\xi_\mu^{(+)} + V_\mu + \gamma_5 \left(\xi_\mu^{(-)} + A_\mu \right) \right], \quad (15)$$

$$\xi_\mu^{(\pm)} = \frac{i}{2} (\xi \partial_\mu \xi^\dagger \pm \xi^\dagger \partial_\mu \xi), \quad (16)$$

$$\Sigma = \xi m \xi + \xi^\dagger m \xi^\dagger, \quad \xi = \exp\left(\frac{i}{2} \phi\right). \quad (17)$$

Проекционные операторы имеют вид $P_R = (1 + \gamma_5)/2$, $P_L = (1 - \gamma_5)/2$. Псевдоскалярное поле ϕ безразмерно, позднее, при переходе к полевым функциям физических состояний, оно приобретет необходимую размерность массы. Матрица M диагональна $M = \text{diag}(M_u, M_d, M_s)$, а ее элементами являются массы конститuentных кварков Q . Эти массы возникают в результате динамического нарушения симметрии и контролируются уравнением щели.

Для получения эффективного мезонного лагранжиана следует проинтегрировать по кварковым полям Q . Неравенство кварковых масс приводит к необходимости учета разностных эффектов, аккумулируемых при разложении эффективного действия в ряд по степеням собственного времени t , в t – зависимых коэффициентах. Именно это обстоятельство отличает ряд Вольтерры от тейлоровского. В пределе равных масс кварков эти коэффициенты трансформируются в экспоненту, которая полностью факторизуется, в результате чего ряд Вольтерры переходит в обычный ряд Тейлора. В силу приведенных

соображений, мы на этом шаге воспользуемся рядом Вольтерры [8], что существенно отличается от стандартного рассмотрения модели НИЛ.

В частности, разложение ведет к условию самосогласованности (условию отсутствия в эффективном лагранжиане линейных по σ членов), известному как уравнение щели:

$$M_i \left(1 - \frac{N_c G_S}{2\pi^2} J_0(M_i) \right) = m_i \quad (i = u, d, s), \quad (18)$$

где

$$J_0(M_i) = \Lambda^2 - M_i^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M_i^2} \right). \quad (19)$$

Параметр обрезания Λ характеризует масштаб, на котором изучается рассматриваемая эффективная теория. В данном случае это масштаб адронных масс, который мы полагаем равным $4\pi F \simeq 1.1$ ГэВ.

В режиме сильной связи

$$G_S \Lambda^2 > \frac{2\pi^2}{N_c} = 6.58 \quad (20)$$

каждое из трех уравнений (18) имеет нетривиальное решение, которое ведет к возникновению щели в спектре фермионов и, как следствие, к динамическому нарушению киральной симметрии. Согласно КХД, спонтанное нарушение киральной симметрии и конфайнмент имеют место в пределе больших N_c [16, 17], поэтому из (20) следует, что $G_S \sim \mathcal{O}(1/N_c)$. Очевидно, что $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$.

В теории с нарушенной киральной симметрией возникает смешивание псевдоскалярных состояний с аксиально-векторными. Для их устранения необходимо переопределить аксиально-векторные поля [18]

$$A_\mu = A'_\mu - \kappa_A \circ \xi_\mu^{(-)}, \quad (21)$$

где κ_A – матрица, а символ \circ означает адямаровское произведение матриц [19], которое определяется почленным умножением соответствующих элементов матриц

$$(A \circ B)_{ij} = A_{ij} B_{ij} \quad (22)$$

без суммирования по повторяющимся индексам. Это произведение, в отличие от стандартного, коммутативно, но сохраняет свойства ассоциативности и дистрибутивности.

Смешивание будет отсутствовать, если матричные элементы κ_A имеют вид

$$(\kappa_A)_{ij}^{-1} = 1 + \frac{8\pi^2}{N_c G_V [2(M_i + M_j)^2 J_{ij} + (\Delta J_0)_{ij}]}. \quad (23)$$

Явный вид интегралов $J_{ij} = J_1(M_i, M_j)$ и $(\Delta J_0)_{ij}$ приведен в Приложении D работы [8]. Из данной формулы, в частности, следует, что $G_V \sim \mathcal{O}(1/N_c)$.

Найдем выражения для масс псевдоскалярных мезонов. Нас интересуют только массы каонов K^\pm , K^0 , \bar{K}^0 и заряженных пионов π^\pm . Результаты вычислений спектра нейтральных состояний π^0 , η , η' будут представлены в отдельной работе, так как здесь они не потребуются.

Заметим, что кинетическая часть лагранжиана свободных мезонных полей будет иметь стандартный вид, если переопределить переменные

$$\begin{aligned} \pi^\pm &= f_{ud}^{-1} \pi_{\text{ph}}^\pm, & K^\pm &= f_{us}^{-1} K_{\text{ph}}^\pm, \\ K^0 &= f_{ds}^{-1} K_{\text{ph}}^0, & \bar{K}^0 &= f_{ds}^{-1} \bar{K}_{\text{ph}}^0, \end{aligned} \quad (24)$$

где физические состояния отмечены индексом ph и, как легко видеть, имеют размерность массы, а константы $f_{ij} \sim \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ имеют вид

$$f_{ij} = \sqrt{\frac{(\kappa_A)_{ij}}{4G_V}}. \quad (25)$$

Массовые формулы псевдоскаляров следуют из последнего слагаемого в (13), в котором необходимо перейти к физическим полям

$$\bar{M}_{\pi^\pm}^2 = \frac{1}{4G_S f_{ud}^2} (M_u + M_d)(m_u + m_d), \quad (26)$$

$$\bar{M}_{K^\pm}^2 = \frac{1}{4G_S f_{us}^2} (M_u + M_s)(m_u + m_s), \quad (27)$$

$$\bar{M}_{K^0}^2 = \frac{1}{4G_S f_{ds}^2} (M_d + M_s)(m_d + m_s). \quad (28)$$

Черта над символом массы, как и раньше, указывает на то, что это выражение получено без учета электромагнитных поправок. Подчеркнем, что формулы (25)–(28) отличаются от аналогичных выражений, полученных как в [14, 15], так и в остальных известных мне работах, использующих модели с четырехкварковыми взаимодействиями. Однако в пределе точной $SU(3)_f$ симметрии имеет место полное совпадение результатов.

3. $1/N_c$ разложение. Рассматриваемая эффективная теория содержит шесть размерных параметров Λ , G_S , G_V , m_i . Первый из них определяет характерный энергетический масштаб, остальные должны быть малы по сравнению с ним. Естественной КХД-индуцированной мерой здесь может быть их $1/N_c$ поведение. Принимая это, полагаем, что $m_i \sim \mathcal{O}(1/N_c)$. Подобное соглашение используется в $1/N_c$ киральной теории возмущений [3, 20]. Данное предположение означает, что формулы (25)–(28) содержат вклады различного порядка по $1/N_c$, каждый из которых, начиная с некоторого вполне определенного шага кирального разложения, должен быть скорректирован соответствующими вкладами петлевых мезонных диаграмм.

Чтобы продвинуться дальше, обратимся к уравнениям (18), которые связывают массы конститuentных и токовых кварков. Подобно тому, как это делалось в работе [21], ищем решение в виде разложения по массам легких кварков

$$M_i(m_i) = M_0 + M'(0) m_i + \mathcal{O}(m_i^2). \quad (29)$$

Очевидно, что в киральном пределе $m_i = 0$ массы конститuentных кварков равны между собой. Эту величину обозначим через M_0 , а ее значение найдем, решив уравнение

$$1 - \frac{N_c G_S}{2\pi^2} J_0(M_0) = 0. \quad (30)$$

Коэффициенты ряда Тейлора в разложении (29) определим путем дифференцирования уравнения (18), считая m_i независимыми переменными. На первом шаге находим

$$M'(0) = \frac{\pi^2}{N_c G_S M_0^2 J_1^0} = \frac{G_V}{G_S} (\kappa_{A0}^{-1} - 1) \equiv a. \quad (31)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 0 у знака функции, зависящей от кварковых масс m_i , означает, что данная функция вычисляется в пределе $m_i \rightarrow 0$. Так $J_1^0 = J_1(M_0)$, а $\kappa_{A0}^{-1} = \lim_{m_i, m_j \rightarrow 0} (\kappa_A)_{ij}^{-1}$. Поскольку

$$J_1(x) = \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{x^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + x^2} \quad (32)$$

монотонно убывающая положительно определенная функция от x в области $x > 0$, заключаем, что $a > 0$.

Подставляя разложение (29) в (26)–(28), в лидирующем порядке по массам токовых кварков приходим к известному результату алгебры токов для масс псевдоскалярных мезонов, где коэффициент

$$B_0 = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle_0}{F^2} = \frac{2G_V M_0}{G_S \kappa_{A0}} = \frac{M_0}{2G_S F^2}. \quad (33)$$

Поскольку B_0 зависит только от параметров модели, из массовых формул можно извлечь информацию не только об отношениях (6) и (7), но и определить абсолютные величины кварковых масс.

Вычислим первую поправку к результату алгебры токов. Для этого сделаем следующий шаг в разложении выражений (26)–(28) по массам легких кварков. Имеем

$$\bar{m}_{\pi^+}^2 = \bar{\mu}_{\pi^+}^2 \left(1 + \frac{m_u + m_d}{2M_0} \delta_M \right), \quad (34)$$

$$\bar{m}_{K^+}^2 = \bar{\mu}_{K^+}^2 \left(1 + \frac{m_u + m_s}{2M_0} \delta_M \right), \quad (35)$$

$$\bar{m}_{K^0}^2 = \bar{\mu}_{K^0}^2 \left(1 + \frac{m_d + m_s}{2M_0} \delta_M \right). \quad (36)$$

Поправки содержат общий множитель δ_M , который имеет вид

$$\delta_M = a \left\{ 1 - 2(1 - \kappa_{A0}) \left[1 - \frac{\Lambda^4}{J_1^0 (\Lambda^2 + M_0^2)^2} \right] \right\}. \quad (37)$$

Переписав отношения (1) и (2) через массовые формулы (34)–(36), убеждаемся, что

$$\frac{\bar{m}_{K^+}^2 - \bar{m}_{K^0}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2} = \frac{m_u}{m_d} \left[1 - \frac{\delta_M}{2M_0} m_s \left(\frac{m_d}{m_u} - \frac{m_u}{m_d} \right) \right], \quad (38)$$

$$\frac{\bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{\pi^+}^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2} = \frac{m_s}{m_d} \left[1 + \frac{\delta_M}{2M_0} m_u \left(\frac{m_s}{m_d} - \frac{m_d}{m_s} \right) \right]. \quad (39)$$

Отсюда видно, что при $\delta_M > 0$ (и после учета электромагнитных поправок) имеют место неравенства (8) и (9). Если $\delta_M < 0$, неравенства изменяются на противоположные. Знак δ_M совпадает со знаком выражения, заключенного в фигурные скобки в (37), которое является монотонно возрастающей функцией от переменной M_0 (при $M_0 \geq 0$) и становится строго положительным, начиная с некоторого значения $M_{0\min}$. В точке $M_{0\min}$ параметр δ_M равен нулю.

Если $M_0 = M_{0\min}$, то первая поправка отсутствует. В этом случае выполняются соотношения Вайнберга. При $\Lambda = 1.1$ ГэВ пять параметров: G_S , G_V , m_i можно фиксировать по условию $\delta_M = 0$, феноменологическим значениям масс μ_{π^+} , μ_{K^0} , μ_{K^+} , и константе слабого распада пиона $F = 91,5$ МэВ. В результате находим: $M_0 = M_{0\min} = 244$ МэВ, $G_S = 6.4$ ГэВ⁻², $G_V = 3.6$ ГэВ⁻². Величина кваркового конденсата равна $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3} = 267$ МэВ. Для масс легких кварков имеем $m_u = 2.87$ МэВ, $m_d = 5.14$ МэВ и $m_s = 103.7$ МэВ (использовалась теорема Дашена). Параметр, характеризующий относительную величину нарушения изотопической симметрии по сравнению с нарушением $SU(3)_f$ симметрии, в данном случае равен

$$R = \frac{m_s - \hat{m}}{m_d - m_u} = 44.0, \quad \hat{m} = (m_u + m_d)/2. \quad (40)$$

Если первая поправка отлична от нуля, то величина M_0 вырастет. Это приведет к увеличению кваркового конденсата. Отсюда следует, что значения масс легких кварков уменьшатся. Поэтому полученные выше оценки для m_u , m_d и m_s нужно рассматривать как верхнюю границу, возникающую в рассматриваемой модели.

Вернемся к анализу массовых формул (34)–(36) при $\delta_M \neq 0$. Из них можно составить целый ряд комбинаций, в которых будет отсутствовать явная зависимость от δ_M . Таким образом можно анализировать свойства теории, не располагая точной информацией о самой величине δ_M , которая абсорбируется в физических массах мезонов.

Лойтвиллер рассматривал только одну из возможностей – кривую второго порядка по переменным $x = m_u/m_d$ и $y = m_s/m_d$. К ней мы приходим, если обратимся к следующим отношениям

$$R_1 = \frac{\bar{m}_{K^+}^2}{\bar{m}_{\pi^+}^2} = \frac{m_u + m_s}{m_u + m_d} \left[1 + \frac{m_s - m_d}{2M_0} \delta_M \right], \quad (41)$$

$$\frac{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{\pi^+}^2} = \frac{m_d - m_u}{m_s - m_u} \left[1 + \frac{m_s - m_d}{2M_0} \delta_M \right], \quad (42)$$

из которых следует, что

$$Q^2 \equiv \left(\frac{\bar{m}_{K^+}^2}{\bar{m}_{\pi^+}^2} \right) \frac{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{\pi^+}^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2} = \frac{m_s^2 - m_u^2}{m_d^2 - m_u^2}. \quad (43)$$

Правая часть данного выражения зависит только от отношения масс легких кварков x и y . Геометрическим местом точек (x, y) является эллипс

$$y^2 - x^2(1 - Q^2) = Q^2. \quad (44)$$

Если учесть электромагнитные поправки, то в соответствии с теоремой Дашена находим

$$Q^2 \rightarrow Q_D^2 = \frac{(m_{K^0}^2 - m_{\pi^0}^2)(m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2)}{m_{\pi^0}^2(m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2)}, \quad (45)$$

что для физических значений масс дает $Q_D = 24.3$.

Прямой подстановкой в (44) легко убедиться, что точка с координатами $(x, y) = (R_{xD}, R_{yD})$ принадлежит эллипсу с большой полуосью $Q \rightarrow Q_D$. В дальнейшем для краткости будем называть ее точкой Вайнберга. Для нее $\delta_M = 0$ и, следовательно, выполняются соотношения Вайнберга (6) и (7).

Сравнивая эти результаты с аналогичными формулами работы [3], убеждаемся, что используемый там параметр Δ_M в данном конкретном случае имеет вид

$$\Delta_M = \frac{m_s - m_d}{2M_0} \delta_M. \quad (46)$$

Ничто не мешает нам выбрать для исключения зависимости от δ_M другие комбинации, составленные из мезонных масс. Остановимся на двух примерах, которые позволяют установить границы для максимальных отклонений от кривой второго порядка.

Первый пример связан с отношениями R_1 и

$$R_z = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{\pi^+}^2}{\bar{m}_{K^+}^2 - \bar{m}_{K^0}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2} = \frac{y}{x} \left[1 + m_d \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) \frac{\delta_M}{2M_0} \right]. \quad (47)$$

Исключая δ_M , приходим к эллиптической кривой

$$x(y-1)(xR_z - y) = (y-x)(x+1)R_1 + x^2 - y^2, \quad (48)$$

график которой имеет две связанные компоненты, одна из которых проходит через точку Вайнберга и определяет нижнюю границу на рис. 1. Здесь, как и для

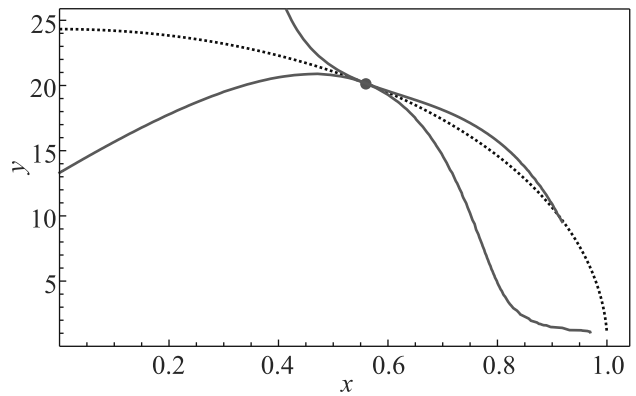


Рис. 1. (Цветной онлайн) Эллипс (44) (пунктирная линия) и кривые (48) (нижняя) и (51) (верхняя), полученные с учетом теоремы Дашена. Обозначена точка Вайнберга, принадлежащая всем трем кривым

пунктирной кривой эллипса, используются физические значения мезонных масс, которые учитывают электромагнитные поправки в соответствии с теоремой Дашена, т.е.,

$$R_1 \rightarrow R_{1D} = 1 + \frac{m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{\pi^0}^2}, \quad (49)$$

$$R_z \rightarrow R_{zD} = \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{2m_{\pi^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}. \quad (50)$$

Второй пример связан с выбором отношений R_z и R_x . Он ведет к кривой пятого порядка

$$xy(1-x^2)(xR_z - y) = (y^2 - x^2)(x - R_x). \quad (51)$$

Она имеет три связанные компоненты. На рисунке 1 изображена компонента, проходящая через точку Вайнберга. Она также получена с учетом теоремы Дашена: $R_z \rightarrow R_{zD}$ и $R_x \rightarrow R_{xD}$ и в основном расположена выше эллипса (44). Остальные возможные кривые лежат внутри границ, представленных данными линиями. Общим для них является то, что все они проходят через точку Вайнберга.

Наличие множества кривых, порождаемых массовыми формулами (34)–(36), не влияет на выполнение неравенств Лойтвиллера, но значительно расширяет область значений, принимаемых переменными x и y . Это, в свою очередь, накладывает дополнительные ограничения на результаты, полученные на базе какой-либо отдельно взятой кривой, особенно при достаточно больших отклонениях от точки Вайнберга.

В качестве иллюстрации вычислим отношения (x, y) , исходя из формул (34)–(36) и покажем, что результат не принадлежит эллипсу. Для этого фиксируем параметры так, чтобы $\delta_M \neq 0$: $\Lambda = 1.1 \text{ ГэВ}$, $G_S = 6.6 \text{ ГэВ}^{-2}$, $G_V = 6.8 \text{ ГэВ}^{-2}$. Это ведет к следующим оценкам: $M_0 = 274 \text{ МэВ}$, $\Delta_M = 0.092$, $x = 0.62$, $y = 19.10$. Эта точка лежит под кривой эллипса. Точка эллипса с абсциссой $x = 0.62$ имеет ординату $y = 19.17$. Ввиду малости параметра Δ_M , отклонение невелико, но с его ростом отклонение будет расти. Для полноты картины приведем также полученные здесь значения масс легких кварков, констант слабого распада мезонов, и параметра R : $m_u = 2.8 \text{ МэВ}$, $m_d = 4.5 \text{ МэВ}$, $m_s = 86.1 \text{ МэВ}$, $f_\pi = 93.2 \text{ МэВ}$, $f_{K^+}/f_\pi = 1.21$, $R = 47.6$.

В качестве альтернативной ситуации рассмотрим широко обсуждаемую проблему ненарушения СР-четности в КХД [22]. Этот феномен можно было бы объяснить в теории с безмассовым u -кварком. Что по этому поводу нам говорят формулы (34) и (35)? Из них следует, что при $m_u = 0$ и с учетом теоремы Дашена

$$\Delta_M = \frac{R_{1D}}{y} - 1. \quad (52)$$

Для эллипса $y = Q_D$ находим $\Delta_M = -0.45$. Как было установлено Лойтвиллером, такой результат отвечает слишком большим поправкам и лежит за пределами допустимой нижней границы $\Delta_M > -0.07$, диктуемой расщеплением $\eta - \eta'$ уровней. Это указывает на то, что значение $m_u = 0$ маловероятно.

Если исходить из кривой (48), то формула (52) дает совершенно другую оценку $\Delta_M = 0$, что, казалось бы, не исключает вариант с $m_u = 0$. Однако, условие $\Delta_M = 0$ означает отсутствие первой поправки. В этом случае справедлива формула Вайнберга (6), левая часть которой теперь равна нулю, а правая, как следует из мезонного спектра, равна 0.56. Такое сильное расхождение с экспериментальными данными сдвигает нижнюю границу в область $\Delta_M > 0$. Лойтвиллер пришел к аналогичному неравенству, исходя из тщательного анализа спектра нейтральных состояний π^0, η, η' , который учитывал эффекты, обусловленные нарушениями $U(1)_A$ симмет-

рии и правила Цвейга. Мы видим, что неравенство является прямым следствием формул (34)–(36).

Параметр Δ_M характеризует степень нарушения $SU(3)_f$ симметрии. Его величину невозможно вычислить в рамках $1/N_c$ киральной теории возмущений. Если же привлечь дополнительные (разумные) соображения, то можно получить оценку $0 < \Delta_M \leq 0.13$ [23]. Рассматриваемая здесь модель, как было показано выше, дает величину $\Delta_M = 0.092$, которая принадлежит данному интервалу.

Теорема Дашена справедлива только в лидирующем приближении кирального разложения. Поскольку $\Delta_M \neq 0$, вообще говоря, необходимо принять во внимание возможное отклонение от (5), т.е., считать, что $\tilde{\Delta}_{el}^2 \neq \Delta_{el}^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2$. В результате массовые формулы (34)–(36) приобретают дополнительную зависимость от параметра $\tilde{\Delta}_{el}$, область изменения которого можно зафиксировать из наблюдаемой ширины распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ [3]. В терминах отношения Q_D , это интервал $Q_D = 22.7 \pm 0.8$, что в пересчете на $\tilde{\Delta}_{el}$ дает $\tilde{\Delta}_{el} = (44.8 \pm 4.5) \text{ МэВ}$. Для сравнения укажем, что $\Delta_{el} = 35.5 \text{ МэВ}$.

Расчеты, учитывающие нарушение теоремы Дашена, показывают, что $\Delta_M = 0.092 \pm 0.002$, отношение $R = 41.6 \pm 2.9$ (см., например, [24], где $R = 41 \pm 4$). При этом

$$\begin{aligned} m_u &= (2.65 \pm 0.07) \text{ МэВ}, \\ m_d &= (4.63 \pm 0.07) \text{ МэВ}, \\ m_s &= (85.94 \pm 0.07) \text{ МэВ}, \\ m_u/m_d &= 0.57 \pm 0.03, \\ m_s/m_d &= 18.55 \pm 0.29. \end{aligned} \quad (53)$$

Для конституентных кварков отсюда следует, что $M_u = 283 \text{ МэВ}$, $M_d = 290 \text{ МэВ}$ и $M_s = 575 \text{ МэВ}$, причем эти величины практически не изменяются при вариации кварковых масс в интервале, определяемом данными по ширине распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$.

4. Выводы. В статье представлены первые результаты по изучению механизма нарушения киральной симметрии при низких энергиях на основе модели с четырехкварковыми взаимодействиями. В отличие от многочисленных исследований, посвященных модели НИЛ, здесь предложен альтернативный подход, базирующийся на двух новых идеях. Первая связана с заменой обычного тейлоровского разложения по степеням собственного времени на ряд Вольтерры, успешно применяющийся при анализе нелинейных систем. Этот шаг ведет к эффективному действию, содержащему существенно большее число членов, чем при стандартном рассмотрении модели НИЛ. При этом, число основных пара-

метров модели остается прежним. Второй отличительной чертой подхода является использование гипотезы о $1/N_c$ поведении легких кварковых масс: $m_i \sim \mathcal{O}(1/N_c)$. Данная гипотеза позволяет свести задачу вычисления спектра π и K мезонов к задаче определения масс легких кварков, исходя из экспериментально известных масс псевдоскаляров.

Показано, что рассмотрение первой $1/N_c$ поправки к результату алгебры токов успешно описывает массы π^\pm , K^\pm , K^0 , \bar{K}^0 мезонов, значения констант распада f_π , f_K , отношения m_u/m_d , m_s/m_d , а также параметры, характеризующие нарушение изотопической и $SU(3)_f$ симметрий Δ_M и R . Полученные значения для абсолютных величин масс легких кварков и кваркового конденсата, менее успешны. Они полностью согласуются с аналогичными значениями бегущих кварковых масс и конденсата, получаемых в \overline{MS} схеме на масштабе 2 ГэВ (см., например, [25]). Однако наши оценки отвечают энергетической шкале 1 ГэВ. Такое расхождение может служить указанием на необходимость рассмотрения следующей $1/N_c$ -поправки, которая, как известно, включает киральные логарифмы. Этот вопрос требует отдельного исследования.

1. R. Dashen, Phys. Rev. **183**, 1245 (1969).
2. S. Weinberg, *The problem of mass*, in *A Festschrift for I. I. Rabi*, ed. by L. Motz, Trans. New York Acad. Sci., New York Acad. of Sciences, N.Y. (1977), p. 185.
3. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 163 (1996).
4. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
5. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
6. A. A. Osipov, JETP Lett. **113**(6), 413 (2021).
7. A. A. Osipov, Phys. Lett. B **817**, 136300 (2021).
8. A. A. Osipov, Phys. Rev. D **104**(10), 105019 (2021).
9. V. A. Fock, Izv. Akad. Nauk. USSR (Phys.) **4–5**, 551 (1937).
10. V. A. Fock, Phys. Zs. Sowjet. **12**, 404 (1937).
11. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
12. M. K. Volkov, Ann. of Phys. **157**, 282 (1984).
13. A. Dhar, R. Shankar, and S. R. Wadia, Phys. Rev. D **31**, 3256 (1985).
14. M. K. Volkov, ЭЧАЯ **17**, 432 (1986).
15. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
16. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).
17. E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).
18. J. Morais, B. Hiller, and A. A. Osipov, Phys. Lett. B **773**, 277 (2017).
19. G. P. H. Styan, Linear Algebra and its Appl. **6**, 217 (1973).
20. P. Herrera-Siklody, J. I. Latorre, P. Pascual, and J. Taron, Nucl. Phys. B **497**, 345 (1997).
21. V. Bernard, A. A. Osipov, and U.-G. Meißner, Phys. Lett. B **285**, 119 (1992).
22. A. Hook, Proceedings of Science **333** (2019); arXiv:1812.02669, doi:10.22323/1.333.0004.
23. H. Leutwyler, *Light-quark masses*, in *Masses of fundamental particles: Cargèse 1996*, ed. by M. Lévy, J. Iliopoulos, R. Gastmans, and J.-M. Gérard, Plenum Press, N.Y. (1997).
24. R. Urech, Phys. Lett. B **355**, 308 (1995).
25. M. Jamin, J. A. Oller, and A. Pich, Eur. Phys. J. C **24**, 237 (2002).