Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 7, с. 502 – 506

Лестничные соотношения на функции Бесселя–Макдональда и $\mathfrak{osp}(1|2)$ цепочка Тоды

Е. Доценко[1)]

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

Факультет математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 119048 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 августа 2021 г.
После переработки 24 августа 2021 г.
Принята к публикации 30 августа 2021 г.

В настоящей работе исследуется открытая цепочка Тоды, ассоциированная с супералгеброй $\mathfrak{osp}(1|2)$. Показывается, что лестничные соотношения на функции Бесселя–Макдональда возникают естественным образом.

DOI: 10.31857/S1234567821190101

Функция Бесселя–Макдональда $K_\alpha(e^\phi)$ возникает как решение дифференциального уравнения Бесселя

$$\left(\partial_\phi^2 - e^{2\phi}\right) K_\alpha(e^\phi) = \alpha^2 K_\alpha(e^\phi), \tag{1}$$

где параметр $\alpha \in i\mathbb{R}$, с асимптотиками

$$K_\alpha(e^\phi) \sim e^{-e^\phi}, \phi \to +\infty, \tag{2a}$$

$$K_\alpha(e^\phi) \sim e^{\alpha\phi}, \phi \to -\infty, \tag{2b}$$

и имеет следующее интегральное представление

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_0^\infty dy y^{-\alpha-1} e^{-y-\frac{x^2}{4y}}, \tag{3}$$

см. [1].

Уравнение (1) и его решение (3) выделено своей связью с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{R})$. Уравнение (1) получается как редукция оператора Лапласа на группе, а интегральное представление (3) возникает как матричный элемент, подробности приведены в [2].

Уравнение (1) может быть факторизовано при помощи лестничных соотношений

$$\left(\partial_x + \frac{\alpha}{x}\right) K_\alpha(x) = K_{\alpha-1}(x), \tag{4a}$$

$$\left(-\partial_x + \frac{\alpha}{x}\right) K_\alpha(x) = K_{\alpha+1}(x), \tag{4b}$$

следующим образом

$$\left(\partial_x + \frac{\alpha+1}{x}\right)\left(\partial_x - \frac{\alpha}{x}\right) K_\alpha(x) = K_\alpha(x), \tag{5}$$

где $x = e^\phi$.

Основной результат работы состоит в том, что рекуррентные соотношения (4a), (4b) связываются с супергруппой $OSP(1|2)$.

Кратко приведем все результаты работы.

$\mathfrak{osp}(1|2)$ гамильтониан

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - \frac{1}{4}\partial_\phi - e^{2\phi} & \frac{1}{2}e^\phi \\ -\frac{1}{2}e^\phi & \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - \frac{1}{4}\partial_\phi - e^{2\phi} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \psi_0(\lambda,\phi) \\ \psi_1(\lambda,\phi) \end{pmatrix} = \frac{2\lambda^2+\lambda}{2} \begin{pmatrix} \psi_0(\lambda,\phi) \\ \psi_1(\lambda,\phi) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

эта матричная система возникается как редукция оператора Казимира на подходящее пространство функций. Разрешение этой матричной системы ведет к лестничным соотношениям на функции Бесселя (4a), (4b).

Матричный гамильтониан диагонализуется

$$H_{\mathfrak{osp}(1|2)} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - e^{2\phi} - \frac{1}{2}e^\phi & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - e^{2\phi} + \frac{1}{2}e^\phi \end{pmatrix} \tag{7}$$

и совпадает с гамильтонианом BC_1 открытой цепочки Тоды. Аналогичная и более общая задача обсуждается в [3]. Также отметим, что гамильтониан (7) допускает следующее суперсимметричное представление:

$$H_{\mathfrak{osp}(1|2)} = \mathfrak{Q}^2, \tag{8}$$

[1)]e-mail: edotsenko95@gmail.com

где

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ Q_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\partial_x + e^x\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_x - e^x\right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (9a)$$

$$x = \phi + \log(2). \quad (9b)$$

Также построены интегральные представления для волновых функций как интегралы Березина – нечетный аналог формул, полученных в [2].

Текст работы организован следующим образом: сначала производится редукция оператора Лапласа на пространство функций определенного вида, затем описывается интегральное представление волновых функций. В последней части мы рассматриваем BC_1 систему Калоджеро–Сазерленда, ее связь с $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ алгеброй, и ее иноземцевское вырождение в контексте суперсимметричной факторизации (8).

Теоретико-групповое описание цепочки Тоды. Супералгебра $\mathfrak{osp}(1|2)$ имеет четные образующие $h, e^{\pm}$ и нечетные $f^{\pm}$. Соотношения следующие:

$$[h, e^{\pm}] = \pm e^{\pm}, \quad (10a)$$

$$[e^+, e^-] = 2h, \quad \{f^{\pm}, f^{\pm}\} = \pm\frac{1}{2}e^{\pm}, \quad (10b)$$

$$\{f^+, f^-\} = \frac{h}{2}, \quad (10c)$$

$$[h, f^{\pm}] = \pm\frac{1}{2}f^{\pm}, \quad (10d)$$

$$[e^{\pm}, f^{\mp}] = -f^{\pm}. \quad (10e)$$

Оператор Казимира

$$C = h^2 + \frac{\{e^+, e^-\}}{2} - [f^+, f^-]. \quad (11)$$

Рассмотрим множество элементов Γ на супергруппе $OSP(1|2)$ вида

$$g = e^{2\theta_1 f^+} e^{x_1 e^+} e^{\phi h} e^{x_2 e^-} e^{2\theta_2 f^-},$$

где x_i, ϕ – четные, а θ_i – нечетные координаты.

В выбранной параметризации правое действие $\mathfrak{osp}(1|2)$ векторными полями на пространстве функций на Γ имеет вид (для сокращения будем обозначать элемент алгебры и соответствующее ему векторное поле одной и той же буквой)

$$e^+ = \partial_{x_1}, \; h = -\frac{\partial_\phi}{2} - x_1\partial_{x_1} - \frac{1}{2}\theta_1\partial_{\theta_1}, \quad (12a)$$

$$e^- = e^{2\phi}\partial_{x_2} - x_1^2\partial_{x_1} - x_1\partial_\phi - x_1\theta_1\partial_{\theta_1} + \\ + e^{\phi}\theta_1(\partial_{\theta_2} - \theta_2\partial_{x_2}), \quad (12b)$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(\partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_{x_1}), \; f^- = \frac{1}{2}e^{\phi}(\partial_{\theta_2} - \theta_2\partial_{x_2}) - \\ - \frac{1}{2}x_1(\partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_{x_1}) - \frac{1}{2}\theta_1\partial_\phi. \quad (12c)$$

Заметим, что оператор C допускает следующее разложение:

$$C = (Q_+ - Q_-)\left(Q_+ - Q_- + \frac{1}{2}\right), \quad (13a)$$

$$Q_+ = \frac{h}{2} + 2f^+f^-, \quad (13b)$$

$$Q_- = \frac{h}{2} + 2f^-f^+. \quad (13c)$$

В выбранной параметризации оператор Казимира имеет вид

$$C = \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - \frac{1}{4}\partial_\phi + e^{2\phi}\partial_{x_2}\partial_{x_1} - \\ - \frac{1}{2}e^{\phi}\left(\partial_{\theta_1} - \theta_1\partial_{x_1}\right)\left(\partial_{\theta_2} - \theta_2\partial_{x_2}\right), \quad (14)$$

и его ограничение на пространство функций $F_{0,1}$ на Γ

$$F_0 = e^{x_1 - x_2}\left(\psi(\phi) + \theta_1\theta_2\psi_{\theta_1\theta_2}(\phi)\right), \quad (15a)$$

$$F_1 = e^{x_1 - x_2}\left(\theta_1\psi_{\theta_1}(\phi) + \theta_2\psi_{\theta_2}(\phi)\right), \quad (15b)$$

имеет следующий вид

$$C\big|_{F_{0,1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - \frac{1}{4}\partial_\phi - e^{2\phi} & \frac{1}{2}e^{\phi} \\ -\frac{1}{2}e^{\phi} & \frac{1}{4}\partial_\phi^2 - \frac{1}{4}\partial_\phi - e^{2\phi} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Представление (12a)–(12c) допускает редукцию на пространство функций на группе V, эквивариантных относительно борелевской подгруппы B (состоящией из элементов вида $g_B = e^{\phi h}e^{x_2 e^-}e^{2\theta_2 f^-}$), с характером $\chi(e^{\phi h}e^{x_2 e^-}e^{2\theta_2 f^-}) = e^{-2\lambda\phi}$, где $\lambda \in i\mathbb{R}$: $f_\chi(x)\chi(g_B) = f_\chi(x)\chi(g_B)$. Имеем

$$e^+ = \partial_{x_1}, \; h = \lambda - x_1\partial_{x_1} - \frac{1}{2}\theta_1\partial_{\theta_1}, \\ e^- = -x_1^2\partial_{x_1} + 2\lambda x_1 - x_1\theta_1\partial_{\theta_1}, \quad (17a)$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(\partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_{x_1}), \; f^- = -\frac{1}{2}x_1(\partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_{x_1}) + \theta_1\lambda. \quad (17b)$$

Следуя [2], определим скалярное произведение состояний $|f\rangle, |h\rangle \in V$ посредством интеграла Березина по нижнетреугольным матрицам

$$\langle f|h\rangle = \int dx_1 \int d\theta_1 \overline{f(x_1,\theta_1)}h(x_1,\theta_1), \quad (18)$$

таким образом, V является гильбертовым пространством.

Определим левые и правые уиттекеровские состояния в V:

$$f^+|\psi_R^{\pm}\rangle = \pm\frac{i^{3/2}}{2}|\psi_R^{\pm}\rangle, \quad (19a)$$

$$\langle\psi_L|f^- = \langle\psi_L|\frac{i^{3/2}}{2}, \quad (19b)$$

которые представляются функциями

$$|\psi_R^{\pm}\rangle = e^{i^{3/2}x_1}(1 \pm i^{3/2}\theta_1), \tag{20a}$$

$$\langle\psi_L| = e^{-\frac{i^{3/2}}{x_1}}(x_1^{-2\lambda-1} - x_1^{-2\lambda-2}i^{3/2}\theta_1). \tag{20b}$$

Рассмотрим матричные элементы

$$\Psi_{\pm}(\lambda,\tilde{\phi}) = \langle\psi_L|e^{\tilde{\phi}h}|\psi_R^{\pm}\rangle. \tag{21}$$

Явным вычислением проверяется, что

$$\Psi_{\pm}(\lambda,\tilde{\phi}) = 2i^{2\lambda}\left(K_{2\lambda+1}(2ie^{\tilde{\phi}}) \pm K_{2\lambda-1}(2ie^{\tilde{\phi}})\right). \tag{22}$$

Сделаем вставку оператора Казимира и, используя соотношения (10a) – (10e), имеем

$$\begin{aligned}&\langle\psi_L|e^{\tilde{\phi}h}C|\psi_R^{\pm}\rangle = \\ &= \left(\frac{1}{4}\partial_{\tilde{\phi}}^2 + e^{2\tilde{\phi}} \pm \frac{1}{2}e^{\tilde{\phi}}i\right)\langle\psi_L|e^{\tilde{\phi}h}|\psi_R^{\pm}\rangle = \\ &= \frac{\lambda(2\lambda+1)}{2}\langle\psi_L|e^{\tilde{\phi}h}|\psi_R^{\pm}\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение выше совпадает с (6) после замены $\tilde{\phi} = \phi + \frac{\pi i}{2}$.

Теоретико-групповое BC_1 системы Калоджеро–Мозера. В неопубликованной работе С. М. Харчева [4] дана теоретико-групповая интерпретация гамильтониана BC_1 системы Калоджеро–Сазерленда. А именно, рассматривается представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ алгебры

$$e = \partial_z,\ h = 2\lambda - 2z\partial_z,\ f = 2\lambda z - z^2\partial_z, \tag{24}$$

на пространстве функций $|f\rangle \in F$. На F определено скалярное произведение

$$\langle f|g\rangle = \int \overline{f(\overline{z})}g(z). \tag{25}$$

Форма (25) инвариантна относительно действия (24) при $\lambda + \overline{\lambda} = -1$.

Рассмотрим вектор $|v_g\rangle \in F$, который удовлетворяет следующим условиям

$$(e-f)|v_g\rangle = 2ig|v_g\rangle,\ g \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

который представлен функцией

$$|v_g\rangle = (1+iz)^{\lambda+g}(1-iz)^{\lambda-g}. \tag{27}$$

В [4] показано, что функция

$$\Psi(x) = \sinh(x)^{-\frac{1}{2}}\langle v_{g_2}(z), e^{\frac{xh}{2}}v_{g_1}(z)\rangle \tag{28}$$

решает уравнение

$$\begin{aligned}&\left(\partial_x^2 + \frac{g_1^2 + g_2^2 + 1 - 2g_1g_2\cosh(x)}{\sinh^2(x)}\right)\Psi(x) = \\ &= (\lambda + \frac{1}{2})^2\Psi(x).\end{aligned} \tag{29}$$

Решения этого уравнения выражаются через присоединенные функции Лежандра [5]. Уравнение (29) приводится к задаче на собственные значения с гамильтонианом

$$H = \partial_x^2 - \frac{(g_1-g_2)^2+1}{4\cosh(x/2)^2} + \frac{(g_1+g_2)^2+1}{4\sinh^2(x/2)}. \tag{30}$$

И. В. Полюбиным было обнаружено, что гамильтониан (30) модели Калоджеро–Сазерленда допускает представление, аналогичное (8). Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{CM} &= \begin{pmatrix} 0 & Q_{CM+} \\ Q_{CM-} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_x + \nu_1\tanh(\frac{x}{2}) + \nu_2\coth(\frac{x}{2}) \\ \partial_x - \nu_1\tanh(\frac{x}{2}) - \nu_2\coth(\frac{x}{2}) & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{31}$$

Тогда,

$$H_{BC_1} = \mathfrak{Q}_{CM}^2 = \mathrm{diag}(a_1, a_2), \tag{32a}$$

$$a_1 = \partial_x^2 + \frac{\nu_1(\nu_1 - \frac{1}{2})}{\cosh^2(\frac{x}{2})} - \frac{\nu_2(\nu_2 + \frac{1}{2})}{\sinh^2(\frac{x}{2})} - (\nu_1+\nu_2)^2, \tag{32b}$$

$$a_2 = \partial_x^2 + \frac{\nu_1(\nu_1 + \frac{1}{2})}{\cosh^2(\frac{x}{2})} - \frac{\nu_2(\nu_2 - \frac{1}{2})}{\sinh^2(\frac{x}{2})} - (\nu_1+\nu_2)^2, \tag{32c}$$

где параметры ν_i, g_i связаны следующим образом

$$\nu_i \left(\nu_i + (-\frac{1}{2})^i \right) = -\frac{(g_1 + (-1)^i g_2)^2 + 1}{4}. \tag{33}$$

Известно, что тригонометрические системы Калоджеро–Мозера допускают вырождение в открытую цепочку Тоды [6, 7]. Сделаем следующее преобразование:

$$x \to x + \Delta/2, \;\; \nu_i = \alpha_i e^{\Delta}, \; i = 1, 2. \tag{34}$$

В пределе $\Delta \to \infty$

$$H_{BC_1} \to \begin{pmatrix} \partial_x^2 + \alpha_1^2 e^{-4x} + \alpha_1 \alpha_2 e^{-2x} & 0 \\ 0 & \partial_x^2 + \alpha_1^2 e^{-4x} - \alpha_1 \alpha_2 e^{-2x} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Заметим, что операторы $Q_{CM\pm}$ имеют конечный предел только в случае $\alpha_1 = -\alpha_2$, что в точности отвечает (6).

1. I. S. Gradstein and I. M. Ryzhik, *Tables of integrals*, GIFML, Moscow (1963).
2. A. Gerasimov, S. Kharchev, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, and A. Mironov, Int. J. Mod. Phys. A **12**(14), 2523 (1997).
3. A. A. Gerasimov, D. R. Lebedev, and S. V. Oblezin, arXiv:2012.08902 (2020).
4. S. Kharchev, private communication.
5. N. Y. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, 2nd ed. Nauka, Moscow (1991), pp. 311, 327–328.
6. V. I. Inozemtsev, Commun. Math. Phys. **121**(4), 629 (1898).
7. A. V. Zotov and Y. B. Chernyakov, Theor. Math. Phys. **129**(2), 1526 (2001).