Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 11, с. 723 – 726

Численное исследование многочастичного рождения в теории ϕ^4: сравнение с аналитическими результатами

С. В. Демидов[+*], *Д. Г. Левков*[+×], *Б. Р. Фархтдинов*[+*1)]

[+]*Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[×]*Институт теоретической и математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 ноября 2021 г.
После переработки 8 ноября 2021 г.
Принята к публикации 9 ноября 2021 г.

Разработан численный метод для вычисления вероятностей многочастичного рождения в слабо связанных скалярных теориях поля. Метод основан на квазиклассическом подходе Д.Т. Шона, использующем сингулярные классические решения. Мы применяем метод к процессам $1 \to n$ в теории $\lambda\phi^4$ с ненарушенной симметрией и воспроизводим известные в литературе результаты при $1 \ll n \ll \lambda^{-1}$.

DOI: 10.31857/S1234567821230014

1. Введение. Как известно, теория возмущений не применима для вычисления амплитуд с большим количеством внешних ног $n \gtrsim \lambda^{-1}$, где λ – малая константа связи [1, 2]. Действительно, пересуммирование ряда теории возмущений в теории $\lambda\phi^4$ [3, 4] показывает [5], что вероятность многочастичного рождения экспоненциально подавлена при больших n. К примеру, инклюзивная вероятность рождения $n \gg 1$ частиц из одной виртуальной частицы имеет вид

$$\mathcal{P}_{1\to n}(E) \equiv \sum_f |\langle f; E, n|\hat{\mathcal{S}}\,\hat{\phi}(0)|0\rangle|^2 \propto \mathrm{e}^{F_{1\to n}/\lambda}, \quad (1)$$

где $\hat{\phi}(0)$ создает виртуальное начальное состояние, $\hat{\mathcal{S}}$ обозначает S-матрицу, суммирование производится по всем n-частичным конечным состояниям с энергией E, и мы опускаем все несущественные префакторы. При этом экспонента подавления $F_{1\to n} < 0$ в правой части выражения (1) является функцией комбинаций λn и λE.

В последнее время значительно возрос интерес к изучению многочастичных процессов [6–11]. Это произошло из-за высказанной в статье [12] гипотезы о том, что, вопреки выражению (1), сечение множественного рождения бозонов Хиггса растет факториально при высоких энергиях. Данный механизм "Хиггсовского взрыва" впоследствии критиковался в работах [8, 13–15], и сейчас ситуация все еще далека от разрешения. Таким образом, представляется важным дальнейшее развитие надежных методов вычисления амплитуд многочастичного рождения.

Некоторое время назад Д. Т. Шон предложил [16] общий квазиклассический метод вычисления вероятностей многочастичных процессов при $\lambda n \sim O(1)$. Метод основан на нахождении комплексных сингулярных решений классических уравнений поля с определенными граничными условиями, см. также [17, 18]. Несмотря на то, что этот метод является достаточно общим, он до настоящего времени с успехом применялся только при $\lambda n \ll 1$, когда квазиклассические конфигурации можно найти с помощью полуаналитических соображений.

В данной работе мы впервые разрабатываем полную численную реализацию квазиклассического метода сингулярных решений Д. Т. Шона. Наш алгоритм позволяет вычислять вероятность процессов $1 \to n$ в ненарушенной четырехмерной теории $\lambda\phi^4$ при произвольных $\lambda n \sim O(1)$ и $\lambda E \sim O(m)$, где m — масса частиц в модели. В качестве первого этапа мы приводим здесь численные результаты при $\lambda n \ll 1$ и демонстрируем, что они согласуются с предсказаниями теории возмущений.

2. Квазиклассическое описание многочастичного рождения. В данном разделе мы описываем метод работы [16], рассматривая слабосвязную $(3+1)$-мерную теорию скалярного поля с действием

$$S = \frac{1}{2\lambda}\int d^4x \left(-\phi\Box\phi - \phi^2 - \phi^4/2 \right), \quad (2)$$

где $\lambda \ll 1$ – константа связи, которая одновременно играет роль параметра квазиклассического разложе-

1) e-mail: farkhtdinov@phystech.edu

ния. Здесь и далее мы используем единицы массы: $m = 1$.

Удобно ввести источник J следующим образом:

$$\mathcal{P}_J(E, n) = \sum_f |\langle f; n, E|\hat{\mathcal{S}}\,\mathrm{e}^{-J\hat{\phi}(0)/\lambda}|0\rangle|^2. \qquad (3)$$

Тогда вероятность (1) равна

$$\mathcal{P}_{1\to n} = \lambda^2 \lim_{J\to 0} \mathcal{P}_J/J^2. \qquad (4)$$

В работе [16] величина (3) была представлена в виде функционального интеграла, который при малых λ вычислялся с помощью комплексной седловой конфигурации $\phi(t, \mathbf{x})$. Седловые условия на ϕ включают в себя классическое уравнение поля с источником,

$$\Box\,\phi(x) + \phi(x) + \phi^3(x) = iJ\delta^{(4)}(x), \qquad (5)$$

и определенные граничные условия. А именно, квазиклассическая конфигурация должна быть положительно-частотной в далеком прошлом:

$$\phi \to \int d^3\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{kx}+i\omega_\mathbf{k}t}\,a_\mathbf{k} \qquad \text{при} \qquad t\to -\infty, \qquad (6)$$

где $a_\mathbf{k}$ произвольны, а $\omega_\mathbf{k} = (\mathbf{k}^2+1)^{1/2}$. Кроме того, ожидается, что решение линеаризуется также в бесконечном будущем, т.е. при $t \to +\infty$:

$$\phi \to \int \frac{d^3\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{kx}}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\left(f_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-i\omega_\mathbf{k}t} + g^*_{-\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\omega_\mathbf{k}t}\right). \qquad (7)$$

Седловые условия в этом случае связывают друг с другом положительно- и отрицательно-частотные части поля ϕ:

$$f_\mathbf{k} = \mathrm{e}^{-\theta+2\omega_\mathbf{k}T}\,g_\mathbf{k}, \qquad (8)$$

где T и θ представляют собой множители Лагранжа, возникающие из-за фиксации энергии E и числа частиц n в конечном состоянии. Значения этих величин можно вычислить по стандартным формулам:

$$\lambda E = \int d^3\mathbf{k}\,\omega_\mathbf{k}\,f_\mathbf{k}g^*_\mathbf{k}, \quad \lambda n = \int d^3\mathbf{k}\,f_\mathbf{k}g^*_\mathbf{k}. \qquad (9)$$

В дальнейшем мы будем параметризовать решения с помощью перемасштабированного числа родившихся частиц λn и средней кинетической энергии на частицу $\varepsilon \equiv E/n - 1$.

После получения седловых конфигураций вероятность (1) может быть вычислена как предел

$$\mathcal{P}_{1\to n} \approx \lim_{J\to 0}\mathcal{P}_J \approx \lim_{J\to 0}\mathrm{e}^{F_J/\lambda}, \qquad (10)$$

где мы опустили предэкспоненциальные множители и ввели F_J, равный значению функционала

$$F_J/\lambda = 2ET - n\theta - 2\mathrm{Im}\,S - 2J\,\mathrm{Re}\,\phi(0)/\lambda \qquad (11)$$

на конфигурации $\phi(t, \mathbf{x})$.

Следует отметить, что в методе Д.Т. Шона используется нетривиальное предположение о том, что экспонента подавления в формуле (1) *универсальна*, т.е. не зависит от детальной структуры начального состояния, если последнее содержит малое число частиц $n \ll \lambda^{-1}$ [19–22]. В частности, эта экспонента не чувствительна к выбору источника в выражении (3). При любом определении J, однако, квазиклассическое решение должно стать сингулярным в точке $t = 0$ при $J \to 0$, поскольку его энергия равна нулю при $t < 0$ и равна E при $t > 0$, — см. формулы (6), (9), и работу [23].

В статьях [16, 24, 25] квазиклассические решения были получены аналитически при малых λn и ε. Было продемонстрировано, что в этой области квазиклассическая экспонента $F_{1\to n}$ согласуется с однопетлевым пертурбативным результатом, полученным в работах [4, 26].

3. Численные результаты. Кратко опишем численный метод решения граничной задачи (5)–(9), позволяющий найти седловые конфигурации при произвольных λn и ε. Мы аналитически продолжаем решение на контур комплексного времени, изображенный на рис. 1. Вдоль этого контура фейнмановское начальное условие (6) имеет вид:

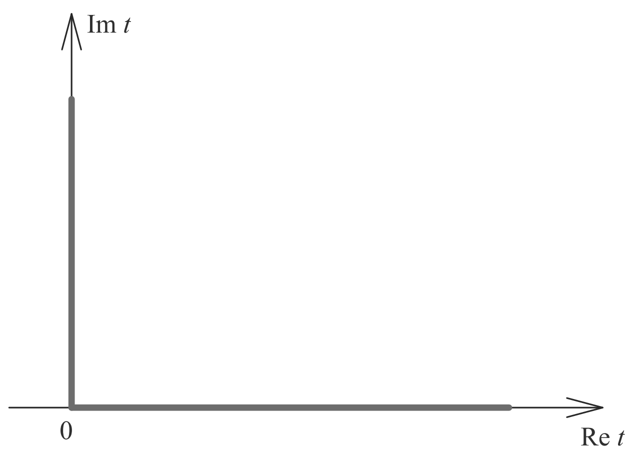

Рис. 1. (Цветной онлайн) Контур в комплексном времени для решения квазиклассической граничной задачи (5)–(9)

$$\phi(t, \mathbf{x}) \to 0 \qquad \text{при} \qquad \mathrm{Im}\,t \to +\infty. \qquad (12)$$

Кроме того, мы регуляризуем источник, заменяя

$$J\delta^{(4)}(x) \to j\,\mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2/2\sigma^2}\,\delta(t). \qquad (13)$$

В дальнейшем мы будем устремлять j и σ к нулю одновременно. Мы подставляем сферически-симметричный анзац $\phi = \phi(t, r)$ в ур. (5) и в граничные условия (6)–(8), после чего дискретизуем полученную систему на прямоугольной пространственно-временной решетке с узлами (t_j, r_k). Полученная дискретная задача решается с помощью метода Ньютона–Рафсона [27].

Изменяя малыми шагами значения T, θ, j и σ, мы находим все регуляризованные численные решения. Соответствующие им экспоненты подавления $F_J(\varepsilon, \lambda n)$ вычисляются по формуле (11). Пример квазиклассической конфигурации $\phi(t, r)$ представлен на рис. 2. На графике виден высокий острый

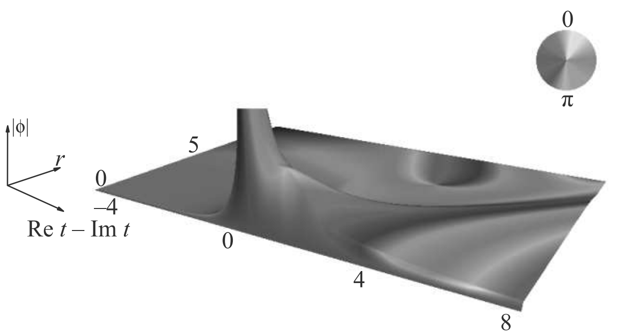

Рис. 2. (Цветной онлайн) Квазиклассическое решение $\phi(t, r)$ с параметрами $\varepsilon \approx 1.35$, $\lambda n \approx 0.38$, $j = 0.3$, и $\sigma \approx 0.1$. Цвет обозначает комплексную фазу поля ϕ

пик в окрестности точки $t = r = 0$, где находится источник. Решение становится сингулярным в этой точке при $j, \sigma \to 0$. Вылетающие из источника волны описывают рожденные частицы конечного состояния.

Вероятность $\mathcal{P}_{1\to n} \approx \exp\{F_{1\to n}/\lambda\}$ получается в квазиклассическом выражении (10) в результате предельного перехода j, $\sigma \to 0$. Однако седловые конфигурации не могут быть вычислены непосредственно при $j = 0$, так как в этом случае они сингулярны. Поэтому мы находим экспоненту подавления, экстраполируя значения F_J полиномами в точку $j = \sigma = 0$ при $j/\sigma = \mathrm{const}$. Технические детали этой процедуры будут опубликованы в отдельной работе.

Для проверки нового алгоритма мы сравнили полученную численно вероятность многочастичного рождения $\mathcal{P}_{1\to n}$ с уже известными пертурбативными результатами при малых λn. В этой области квазиклассическая экспонента $F_{1\to n}$ имеет вид

$$F_{1\to n} = \lambda n \ln\left(\frac{\lambda n}{16}\right) - \lambda n + \lambda n f(\varepsilon) + O(\lambda^2 n^2), \quad (14)$$

где $\varepsilon \simeq O(1)$ и функция $f(\varepsilon)$ неизвестна. Первые три члена в выражении (14) и, в частности, $f(\varepsilon)$, могут быть найдены с помощью древесных диаграмм. Такое вычисление было проделано в работе [25] численно при произвольном ε. При $\varepsilon \le 10$ полученный ответ совпал с более простой оценкой снизу, основанной на $O(4)$-симметричных решениях [28]. Ниже мы используем $O(4)$ оценку для сравнения.

Наши результаты для $f(\varepsilon)$ показаны на рис. 3 кругами с погрешностями, которые оценивают величину ошибки при экстраполяции $j \to 0$. Численные данные покрывают ограниченный интервал энергий $0.3 \le \varepsilon \le 6$. При меньших ε седловые решения становятся нерелятивистскими и не помещаются в доступный для вычислений пространственно-временной объем. При $\varepsilon \ge 6$ решение содержит высокочастотные волны, которые не удается разрешить на имеющейся решетке.

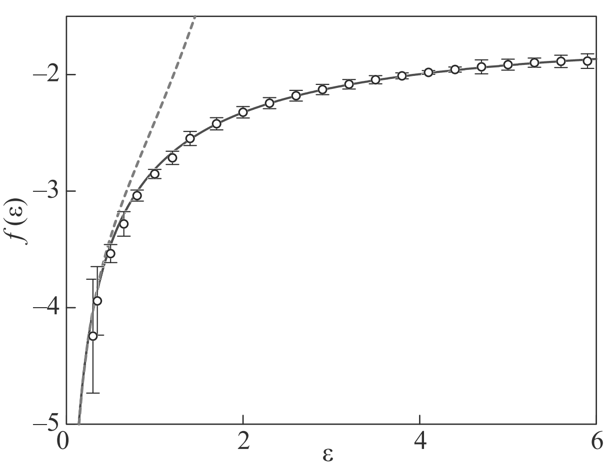

Рис. 3. (Цветной онлайн) Численные значения $f(\varepsilon)$ (круги с погрешностями) и древесные результаты: $O(4)$-симметричная оценка из работ [28, 25] (сплошная линия) и разложение (15) при малых ε (пунктирная линия)

Примечательно, что численные данные, представленные на рис. 3, согласуются с древесными результатами, полученными ранее в литературе. В частности, они совпадают с результатом, полученным с помощью $O(4)$-симметричных седловых конфигураций в работе [28] (сплошная кривая). Кроме того, наши результаты приближаются к асимптотике $f(\varepsilon)$ при малых ε (пунктирная линия),

$$f = \frac{3}{2}\ln\frac{\varepsilon}{3\pi} + \frac{3}{2} - \frac{17}{12}\varepsilon + \\ + \frac{1327 - 96\pi^2}{432}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (15)$$

которая была вычислена в работе [24].

4. Заключение. В данной работе разработан численный метод для квазиклассического вычисления вероятностей процессов рождения n частиц при $n \to +\infty$ и фиксированном λn, где λ – малая константа связи. Мы проиллюстрировали метод с помощью явного вычисления вероятности процесса $1 \to n$ в четырехмерной теории $\lambda\phi^4$ с ненарушенной симметрией. При $\lambda n \ll 1$ наши численные данные согласуются с древесными результатами, полученными ранее в литературе. Стоит подчеркнуть, что наш метод также применим при $\lambda n \sim O(1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта # 20-32-90013.

Численные вычисления были проведены на Вычислительном кластере Теоретического Отдела ИЯИ РАН.

1. J. M. Cornwall, Phys. Lett. B **243**, 271 (1990).
2. H. Goldberg, Phys. Lett. B **246**, 445 (1990).
3. L. S. Brown, Phys. Rev. D **46**, R4125 (1992); arXiv:hep-ph/9209203.
4. M. B. Voloshin, Nucl. Phys. B **383**, 233 (1992).
5. M. V. Libanov, V. A. Rubakov, D. T. Son, and S. V. Troitsky, Phys. Rev. D **50**, 7553 (1994); arXiv:hep-ph/9407381.
6. M. B. Voloshin, Phys. Rev. D **95**, 113003 (2017); arXiv:1704.07320.
7. J. Jaeckel and S. Schenk, Phys. Rev. D **98**, 096007 (2018); arXiv:1806.01857.
8. S. V. Demidov and B. R. Farkhtdinov, JHEP **11**, 068 (2018); arXiv:1806.10996.
9. V. V. Khoze and J. Reiness, Phys. Rept. **822**, 1 (2019); arXiv:1810.01722.
10. J. Jaeckel and S. Schenk, Phys. Rev. D **99**, 056010 (2019); arXiv:1811.12116.
11. S. Schenk, arXiv:2109.00549.
12. V. V. Khoze and M. Spannowsky, Nucl. Phys. B **926**, 95 (2018); arXiv:1704.03447.
13. A. Belyaev, F. Bezrukov, C. Shepherd, and D. Ross, Phys. Rev. D **98**, 113001 (2018); arXiv:1808.05641.
14. A. Monin, arXiv:1808.05810.
15. M. Dine, H. H. Patel, and J. F. Ulbricht, arXiv:2002.12449.
16. D. T. Son, Nucl. Phys. B **477**, 378 (1996); arXiv:hep-ph/9505338.
17. S. Y. Khlebnikov, Phys. Lett. B **282**, 459 (1992).
18. D. Diakonov and V. Petrov, Phys. Rev. D **50**, 266 (1994); arXiv:hep-ph/9307356.
19. V. A. Rubakov, D. T. Son, and P. G. Tinyakov, Phys. Lett. B **287**, 342 (1992).
20. P. G. Tinyakov, Phys. Lett. B **284**, 410 (1992).
21. G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, and V. A. Rubakov, Phys. Rev. D **60**, 076004 (1999); arXiv:hep-ph/9901226.
22. D. G. Levkov, A. G. Panin, and S. M. Sibiryakov, J. Phys. A **42**, 205102 (2009); arXiv:0811.3391.
23. M. V. Libanov, V. A. Rubakov, and S. V. Troitsky, Phys. Part. Nucl. **28**, 217 (1997).
24. F. L. Bezrukov, M. V. Libanov, D. T. Son, and S. V. Troitsky, in *10th International Workshop on High-energy Physics and Quantum Field Theory (NPI MSU 95)*, Moscow, MSU (1996), p. 228; arXiv:hep-ph/9512342.
25. F. L. Bezrukov, Theor. Math. Phys. **115**, 647 (1998); arXiv:hep-ph/9901270.
26. M. B. Voloshin, Phys. Rev. D **47**, R357 (1993); arXiv:hep-ph/9209240.
27. W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed., Cambridge University Press (2007).
28. F. L. Bezrukov, M. V. Libanov, and S. V. Troitsky, Mod. Phys. Lett. A **10**, 2135 (1995); arXiv:hep-ph/9508220.