Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 2, с. 102 – 107 © 2021 г. 25 июля

Метастабильные униполярные структуры упругой деформации

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 191991 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 июня 2021 г.
После переработки 22 июня 2021 г.
Принята к публикации 23 июня 2021 г.

Исследована возможность формирования локализованных метастабильных структур упругой деформации в неравновесном парамагнитном кристалле. В предположении, что время наблюдения процесса значительно превышает характерные времена фазовой релаксации квантового перехода между зеемановскими подуровнями, но короче времени энергетической релаксации, для относительной упругой деформации получено новое интегро-дифференциальное уравнение параболического типа. Данное уравнение содержит компенсирующие друг друга нелокальные усиление и нелинейность. Найдено решение выведенного уравнения в виде бегущей с постоянной скоростью униполярной локализованной структуры. Полученное решение содержит непрерывный свободный параметр, в качестве которого выбрана временная длительность. При укорочении временной длительности амплитуда метастабильного образования возрастает, а скорость распространения, близкая к линейной скорости звука, уменьшается. Показано, что после прохождения локализованного сгустка деформации среда не возвращается к исходному состоянию.

DOI: 10.31857/S1234567821140093

1. Введение. В настоящее время бурный подъем испытывают исследования, связанные с диссипативными солитонами оптической природы [1–7]. Диссипативные солитоны формируются в результате взаимной компенсации усиления сигнала и необратимых потерь его энергии. Оптические диссипативные солитоны могут найти приложения в информационных системах [2, 8], а также в системах механического воздействия на различные микро- и нанообъекты [9, 10].

Одним из плодотворных путей развития нелинейной физической акустики является поиск различных оптико-акустических аналогий [11–15]. На этом пути, особенно после создания лазеров, удалось выявить немало акустических эффектов - аналогов соответствующих нелинейно-оптических явлений. В значительной степени это касается и солитонной тематики. Обнаружения эффектов, связанных с оптическими солитонами, как правило, сопровождались успешными поисками аналогичных солитонов акустической природы [12, 16]. Использование данного подхода позволило предсказать и обнаружить формирование резонансного ультразвукового солитона самоиндуцированной прозрачности в низкотемпературном кристалле, содержащем парамагнитные ионы [17–19].

Одной из тенденций развития современной нелинейной оптики является поиск эффектов взаимодействия с веществом лазерных импульсов все более коротких длительностей [20]. К настоящему времени в лабораторных условиях созданы лазерные импульсы длительностью до одного периода электромагнитных колебаний. В отечественной научной литературе за такими объектами закрепился термин "предельно короткие импульсы" (ПКИ). В англоязычной литературе расхожим является термин "*few-cycle pulses*". Понятно, что при теоретическом описании взаимодействия ПКИ с веществом перестает быть справедливым стандартное для квазимонохроматических импульсов приближение медленно меняющихся огибающих [21–25].

В самые последние годы все более настойчиво пробивает себе дорогу оптика униполярных импульсов [26, 27]. Такие сигналы содержат всего половину периода электромагнитных колебаний. Здесь взаимодействие с веществом приобретает новые, порой экзотические, особенности [28].

В соответствии с программой поиска оптико-акустических аналогий вышло немало теоретических работ, посвященных нелинейному взаимодействию

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

предельно коротких акустических импульсов (включая униполярные упругие импульсы) с веществом [29–35].

Естественным следствием развития оптики предельно коротких и униполярных импульсов явились исследования возможностей формирования униполярных диссипативных солитонов оптической природы [2, 36–38].

Диссипативные солитоны формируются в нелинейных средах, обладающих запасом энергии. Можно сказать, что диссипативные солитоны являются результатом баланса между притоком в сигнал данной запасенной энергии и ее необратимым оттоком. Запасенной энергией обладают, в частности, среды с неравновесными населенностями стационарных квантовых состояний. В таких средах могут формироваться униполярные локализованные импульсы, распространяющиеся с постоянными скоростями [39–41]. Об устойчивости таких импульсов можно рассуждать с некоторой долей условности, так как неустойчивы сами неравновесные среды. По этой причине здесь более уместно говорить не о диссипативных солитонах, а о метастабильных локализованных структурах.

Если идти дальше по пути поиска оптико-акустических аналогий, то следует поставить вопрос о возможности формирования метастабильных униполярных структур упругой деформации в твердых телах. Говорить в этом случае об акустических или ультразвуковых солитонах вряд ли уместно, так как спектр таких сигналов очень широк. В зависимости от временной длительности этот спектр способен простираться от нулевой частоты до частот очень далекого ультразвука (включая гигагерцовые и даже субтерагерцовые частоты) [42].

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию возможности формирования униполярных локализованных структур упругой деформации в неравновесном парамагнитном кристалле.

2. Вывод основного уравнения. Следуя работе [43], будем считать, что импульс продольной упругой деформации распространяется вдоль оси x, параллельной одной из осей четвертого порядка кубического кристалла. Вдоль другой оси z четвертого порядка приложено внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$, вызывающее зеемановские расщепления квантовых состояний примесных парамагнитных ионов с эффективным спином $S = 1$. Известно, что ионы с таким спином наиболее эффективно взаимодействуют с колебаниями кристалла. Спин-фононное взаимодействие обусловлено механизмом ван-Флека [12]. В этом случае градиенты внутрикристаллического электрического поля, создаваемые полем упругой деформации, вызывают квадрупольные электрические переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов.

Из-за снятия вырождения по проекции эффективного спина происходит зеемановское расщепление квантового состояния парамагнитного иона на три подуровня с $S_z = 0, \pm 1$. В принятой выше геометрии распространения продольного упругого импульса спин-фононные переходы вызываются между подуровнями с $S_z = \pm 1$, разделенными частотой расщепления $\omega_Z = 2g\mu_B B/\hbar$, где μ_B – магнетон Бора, g – фактор Ланде, $\hbar$ – постоянная Планка. При этом средний подуровень с $S_z = 0$ остается незадействованным. Таким образом, в данном случае динамика квантового состояния эффективного спина аналогична динамике двухуровневого атома во внешнем поле. Как следствие, соответствующие уравнения для элементов матрицы плотности имеют вид [43]

$$\frac{\partial \rho_{-+}}{\partial t} = \left(i\omega_Z - \frac{1}{T_2} \right) \rho_{-+} - i\Omega w, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -i\Omega \frac{\rho_{-+} - \rho_{-+}^*}{2}, \qquad (2)$$

где $w = (\rho_{++} - \rho_{--})/2$, ρ_{++} и ρ_{--} – вероятности населенностей спиновых подуровней с $S_z = +1$ и $S_z = -1$ соответственно, ρ_{-+} и T_2 – соответственно недиагональный элемент матрицы плотности и время необратимой фазовой релаксации рассматриваемого перехода, акустическая частота Раби Ω определяется выражением

$$\Omega = \frac{G\varepsilon}{\hbar}, \qquad (3)$$

ε – безразмерная относительная деформация, создаваемая упругим импульсом, G – постоянная спин-фононной связи, измеряемая в единицах энергии.

Как и в работе [43], здесь мы пренебрегли продольной релаксацией, характеризуемой временем T_1, так как считаем, что время Δt наблюдения исследуемого процесса удовлетворяет условию

$$T_2,\ T_2^* \ll \Delta t \ll T_1, \qquad (4)$$

где T_2^* – характерное время обратимой фазовой релаксации, обусловленной неоднородным уширением.

Для парамагнитных ионов Fe^+ в кристалле MgO при температурах жидкого гелия $T_2 \sim 10^{-6}$ с, $T_2^* \sim$ $\sim 10^{-8}$ с, $T_1 \sim 10^{-3}$ с [17]. Поэтому условию (4) удовлетворяет, например, время наблюдения $\Delta t \sim$ $\sim 10^{-4}$ с, за которое упругий импульс в твердом теле проходит расстояние $l \sim a\Delta t$, где a – линейная скорость звука в кристалле. Взяв $a \approx 5 \cdot 10^5$ см/с, будем иметь $l \sim 50$ см.

Для поля деформации упругого импульса справедливо волновое уравнение [43]

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x} = \frac{G^2 n}{2\hbar\rho}\frac{\partial^2}{\partial x}\int\limits_0^\infty g(\omega_Z)(\rho_{-+}+\rho^*_{-+})d\omega_Z. \quad (5)$$

Здесь ρ – плотность кристалла, n – концентрация в нем парамагнитных ионов, $g(\omega_Z)$ – удовлетворяющий условию нормировки контур неоднородного уширения рассматриваемого квантового перехода:

$$g(\omega_Z) = \frac{g(0)}{1 + T_2^{*2}(\omega_Z - \omega_0)^2}, \quad (6)$$

ω_0 – центральная резонансная частота перехода, $g(0) = \frac{2T_2^*}{\pi + 2\,\mathrm{arctg}(\omega_0 T_2^*)}$.

Если центральная частота значительно превосходит неоднородную ширину соответствующей спектральной линии ($\omega_0 T+_2^* \gg 1$), то $g(0) = T_2^*/\pi$. Однако в акустике парамагнитных кристаллов встречаются ситуации, когда неоднородная ширина линии сравнима с центральной частотой.

Исключим из базовой системы (1), (2), (4) материальные переменные. Решая уравнение (1), найдем

$$\rho_{-+} = -i\int\limits_0^\infty \Omega(x, t-\tau)w(x, t-\tau)e^{-(1/T_2 - i\omega_Z)\tau}d\tau. \quad (7)$$

Будем считать, что длительность упругого импульса $\tau_p \ll \Delta t$ и при этом удовлетворяет условию

$$\tau_p \gg T_2,\ T_2^*. \quad (4а)$$

При приведенных выше параметрах для ионов Fe^{2+} в кристалле MgO неравенству (4а) с хорошей точностью можно удовлетворить, положив $\tau_p \sim 10^{-5}$ с.

Учитывая (4а), заметим, что экспонента в подынтегральном выражении (7) изменяется со временем значительно быстрее, нежели множитель Ωw. В этом случае справедливо разложение

$$\Omega(x, t-\tau)w(x, t-\tau) =$$

$$= \Omega(x,t)w(x,t) - \tau\frac{\partial}{\partial t}(\Omega(x,t)w(x,t)) + \ldots$$

Ограничившись здесь выписанными членами разложения, отсюда и из (7) получим

$$\rho_{-+} = -i\left[\frac{T_2}{1 - i\omega_Z T_2}\Omega w - \frac{T_2^2}{(1 - i\omega_Z T_2)^2}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega w)\right]. \quad (8)$$

Благодаря левой части неравенства (4) изменение разности населенностей зеемановских подуровней относительно мало. Поэтому при подстановке (8) в (2) ограничимся только первым слагаемым в квадратных скобках (8). Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{T_2\Omega^2}{1 + (\omega_Z T_2)^2}w.$$

Полагая в правой части $w \approx w_{-\infty}$, где $w_{-\infty}$ – начальная разность населенностей (при $t = -\infty$), найдем отсюда после интегрирования

$$w = w_{-\infty}\left[1 - \frac{T_2}{1 + (\omega_Z T_2)^2}\int\limits_{-\infty}^t \Omega^2 dt'\right]. \quad (9)$$

Примем во втором слагаемом в квадратных скобках (8) $w \approx w_{-\infty}$. Тогда после учета (9) в первом слагаемом будем иметь

$$\rho_{-+} = -iw_{-\infty}\left\{\frac{T_2}{1 - i\omega_Z T_2}\times\right. \quad (10)$$

$$\left.\times\,\Omega\left[1 - \frac{T_2}{1 + (\omega_Z T_2)^2}\int\limits_{-\infty}^t \Omega^2 dt'\right] - \frac{T_2^2}{(1 - i\omega_Z T_2)^2}\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right\}.$$

Подстановка (10) в (5) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - a_0^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = -q\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Omega\int\limits_{-\infty}^t \Omega^2 dt' + 2\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right), \quad (11)$$

где $a_0^2 = a^2(1+\eta)$,

$$\eta = w_{-\infty}\frac{G^2 n}{\hbar\rho a^2}T_2^2\int\limits_0^\infty \frac{\omega_Z g(\omega_Z)d\omega_Z}{1 + (T_2\omega_Z)^2},$$

$$q = w_{-\infty}\frac{G^2 n}{\hbar\rho}T_2^3\int\limits_0^\infty \frac{\omega_Z g(\omega_Z)d\omega_Z}{[1 + (T_2\omega_Z)^2]^2}.$$

В экспериментах по акустическому парамагнитному резонансу обычно выполняются условия $T_2 \gg T_2^*$, $\omega_0 T_2 \gg 1$ [17]. Примем также, что $\omega_0 T_2^* \gg 1$. В этом случае при учете (6) имеем $\eta = w_{-\infty}\frac{G^2 n}{\hbar\omega_0\rho a^2}$, $q = \frac{\eta}{2\pi}a^2\omega_0 T_2 T_2^*$.

Взяв для парамагнитных ионов Fe^{2+} в кубическом кристалле MgO $G \sim 10^{-14}$ эрг, $n \sim 10^{19}$ см$^{-3}$, $\omega_0 \sim 10^{11}$ с$^{-1}$, $\rho \approx 5$ г/см^3, $a \approx 5 \cdot 10^5$ см/с [12, 17], будем иметь $\eta \sim 10^{-4}$. Таким образом, поправка к скорости звука, обусловленная спин-фононным взаимодействием оказывается весьма малой.

В правой части уравнения (11) содержатся относительно малые слагаемые из разложения (10). Поэтому мы можем использовать приближение однонаправленного распространения вдоль оси x [44], записав

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - a_0^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\Omega \approx$$
$$\approx 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + a_0\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right).$$

Пренебрегая в правой части (11) разницей между a_0 и a, с хорошей точностью положим $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Тогда, интегрируя (11) по t, получим

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -\alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Omega\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Omega^2 d\tau'\right) - \sigma\frac{\partial^2\Omega}{\partial\tau^2}, \qquad (12)$$

где $\tau = t - x/a_0$,

$$\alpha = \frac{\eta}{4\pi a}\omega_0 T_2 T_2^*, \quad \sigma = 2\alpha. \qquad (13)$$

Если парамагнитные ионы находятся в состояниях с инверсной населенностью зеемановских подуровней ($w_{-\infty} > 0$), то $\sigma = 2\alpha > 0$. Тогда последнее слагаемое в правой части (12) формально аналогично отрицательной вязкости. В нашем случае можно говорить, что оно описывает нелокальное усиление импульса. Благодаря этому слагаемому на линейной стадии пиковое усиление сопровождается временным сжатием импульса. Передача энергии от парамагнитных ионов к упругому импульсу сопровождается уменьшением инверсии населенностей зеемановских подуровней (см. (9)). Это, в свою очередь, приводит к замедлению процесса усиления и его стабилизации, что описывается первым слагаемым в правой части уравнения (12). Взаимная конкуренция описанных выше механизмов способна привести к формированию локализованной структуры упругой деформации, бегущей с постоянной скоростью. Перейдем к процедуре нахождения этого решения.

3. Обобщенное уравнение Бюргерса и униполярный диссипативный солитон. Умножим уравнение (12) на 2Ω. Введя при этом безразмерную динамическую переменную

$$\theta = T_2\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Omega^2 d\tau', \qquad (14)$$

после простых математических преобразований и интегрирования по τ получим уравнение вида

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} + \beta\theta\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} =$$
$$= \int\limits_{\infty}^{\tau}\left[2\sigma T_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tau'}\right)^2 - \beta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2\right]\tau', \qquad (15)$$

где $\beta = \alpha/T_2$.

Если в (15) пренебречь правой частью, то данное уравнение перейдет в хорошо известное уравнение Бюргерса [45]. По этой причине назовем (15) обобщенным уравнением Бюргерса.

Из (9) и (14) видно, что динамический параметр θ определяет изменение разности населенностей зеемановских подуровней. Поэтому можно сказать, что обобщенное уравнение Бюргерса (15) описывает динамику разности населенностей.

Нетрудно видеть, что уравнение (15) имеет решение, схожее по структуре с решением уравнения Бюргерса в виде бегущего фронта:

$$\theta = \frac{\sigma T_2}{\alpha\tau_p}\left[1 + \tanh\left(\frac{t - x/v}{\tau_p}\right)\right], \qquad (16)$$

где скорость v связана с характерной длительностью τ_p фронта соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_0} + \frac{\sigma}{\tau_p}. \qquad (17)$$

Из (14) и (16) следует, что

$$\Omega = \pm\frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}\operatorname{sech}\left(\frac{t - x/v}{\tau_p}\right). \qquad (18)$$

Данное выражение, наряду с (17), является решением уравнения (12) в виде локализованного униполярного импульса. Из (18) видно, что знак полярности импульса может быть как положительным (деформация растяжения), так и отрицательным (деформация сжатия).

Так как в нашем случае $\sigma/\alpha = 2$ (см. (13)), то из (18) и (3) для амплитуды упругой деформации импульса имеем $\varepsilon \sim \hbar/G\tau_p$. Взяв $G \sim 10^{-14}$ эрг, $\tau_p \sim 10^{-5}$ с, найдем $\varepsilon_m \sim 10^{-8}$. Для пиковой интенсивности при скорости звука $a \approx 5\cdot 10^5$ см/с и плотности кристалла $\rho \approx 5$ г/см^3 имеем оценку $I = 0.5\rho a^3\varepsilon_m^2 \sim 10^{-6}$ Вт/см^2.

При описанных выше условиях из определения скорости a_0, а также из (13) и (17) для скорости распространения униполярного импульса получим

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\omega_0 T_2^*}{4\pi}\frac{T_2}{\tau_p} - 1\right)\right]. \qquad (17a)$$

При принятых выше параметрах имеем $\omega_0 T_2^* \sim$ $\sim 10^3$ и $\eta \sim 10^{-4}$. Положив, кроме того, $T_2/\tau_p \sim$ $\sim 10^{-1}$, приходим к выводу, что скорость солитона всего на десятые доли процента отличается от линейной скорости звука в кристалле.

Усредняя (9) по контуру неоднородного уширения (6), с учетом (13) и принятых выше приближений получим

$$\langle w\rangle = \int_0^\infty wg(\omega_Z)d\omega_Z =$$
$$= w_{-\infty}\left\{1-\frac{T_2^*}{4\tau_p}\left[1+\tanh\left(\frac{t-x/v}{\tau_p}\right)\right]\right\}. \quad (19)$$

Таким образом, при условии (4a) изменение разности населенностей зеемановских подуровней, действительно, мало, как это и предполагалось при выводе уравнения (12). Отсюда приходим к выводу, что распространение униполярного импульса упругой деформации (17), (18) сопровождается селективным переходом парамагнитных ионов на основной зеемановский подуровень. Таким образом, состояние среды изменяется после прохождения по ней рассматриваемого импульса, так как импульс необратимо уносит энергию среды.

Диссипативные солитоны, в отличие от консервативных, не обладают непрерывно изменяющимися свободными параметрами. Говоря другими словами, все параметры диссипативного солитона (например, длительность, скорость, амплитуда) жестко определяются коэффициентами уравнения, решением которого является данный диссипативный солитон. В нашем же случае это правило не выполняется: солитоноподобное решение (17), (18) обладает непрерывным свободным параметром. В качестве такого параметра здесь выступает временная длительность импульса. В свою очередь, амплитуда и скорость импульса непрерывно зависят от его длительности. Как видно из (17) и (18), амплитуда импульса возрастает с укорочением его длительности, а скорость уменьшается.

Таким образом, униполярный импульс упругой деформации (17), (18) обладает свойствами как диссипативного (необратимое изменение состояния среды), так и консервативного (существование непрерывного свободного параметра) солитона. Так как сама неравновесная среда на временах $\Delta t \ll T_1$ после создания инверсной населенности квантовых состояний метастабильна, назовем локализованный импульс (17), (18) метастабильной униполярной структурой.

Формирование данной локализованной структуры происходит за счет взаимной компенсации притока в него энергии из неравновесной среды и необратимой потери энергии за счет процессов релаксации.

Заметим, что решение уравнения Бюргерса, содержащего вязкую диссипацию, в виде бегущего волнового фронта также обладает непрерывным свободным параметром [45]. Так как решение (17), (18) уравнения (12) тесно связано с решением (16), (17) обобщенного уравнения Бюргерса (15), то наличие здесь у диссипативного солитона непрерывного свободного параметра представляется вполне естественным.

4. Заключение. Проведенное в настоящей работе исследование выявляет принципиальную возможность формирования в неравновесном парамагнитном кристалле метастабильного униполярного импульса упругой деформации. Нелокальное линейное усиление, описываемое вторым слагаемым в правой части уравнения (12), ограничивается нелинейным насыщением данного усиления (см. первое слагаемое в правой части (12)). Локальное усиление, присущее квазимонохроматическим сигналам и приводящее на линейной стадии к экспоненциальному росту их амплитуд, приводит к возможности формирования диссипативных солитонов в оптике [46] и в физической акустике [43]. У квазимонохроматических диссипативных солитонов, как и следовало ожидать, нет непрерывных свободных параметров. Поэтому есть основания предполагать, что наличие у найденного здесь униполярного солитона непрерывного свободного параметра обусловлено нелокальным характером усиления и ограничивающих это усиление необратимых потерь. Действительно, временная нелокальность приводит к сохранению памяти об условиях на входе в неравновесную диссипативную среду. Это, в свою очередь, и приводит к наличию непрерывного свободного параметра у решения типа локализованной метастабильной структуры (17), (18) уравнения (12).

Результаты наших исследований по формированию униполярных диссипативных солитонов оптической (электромагнитной) природы в многоуровневых средах с нелокальными усилением и потерями мы планируем опубликовать отдельно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект # 17-11-01157).

1. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические о родственные солитоны*, Физматлит, М. (2021).
2. С. К. Турицын, Н. Н. Розанов, И. Я. Яруткина, А. Е. Беднякова, С. В. Федоров, О. В. Штырина, М. П. Федорук, УФН **186**, 713 (2016) [S. K. Turitsyn, N. N. Rosanov, I. A. Yarutkina, A. E. Bednyakova, S. V. Fedorov, O. V. Shtyrina, and M. P. Fedoruk, Phys.-Uspekhi **59**, 642 (2016)].
3. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and Ph. Grelu, International Journal of Bifurcation and Chaos **19**, 2621 (2009).

4. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys. Rev. Lett. **117**, 183901 (2016).
5. С. В. Федоров, Н. Н. Розанов, Н. А. Веретенов, Письма в ЖЭТФ **107**, 342 (2018) [S. V. Fedorov, N. N. Rosanov, N. A. Veretenov, JETP Lett. **107**, 327 (2018)].
6. V. E. Lobanov, O. V. Borovkova, and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **90**, 053820 (2014).
7. V. E. Lobanov, N. M. Kondratiev, and I. A. Bilenko, Opt. Lett. **46**, 2380 (2021).
8. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит, М. (2011).
9. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **111**, 303 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **111**, 268 (2020)].
10. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **112**, 79 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **112**, 71 (2020)].
11. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986) [F. V. Bunkin, Yu. A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov, Sov. Phys.-Uspekhi **29**, 607 (1986)].
12. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, М. (1977).
13. У. Х. Копвиллем, В. Д. Корепанов, ЖЭТФ **41**, 211 (1961) [U. Kh. Kopvillem and V. D.'Korepanov, JETP **41**, 211 (1961)].
14. C. Kittel, Phys. Rev. Lett. **6**, 449 (1961).
15. E. B. Tucker, Phys. Rev. Lett. **6**, 547 (1961).
16. В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, М. (1991).
17. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
18. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971) [G. A. Denisenko, JETP **33**, 1220 (1971)].
19. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974) [V. V. Samartsev, B. P. Smolyakov, and R. Z. Sharipov, JETP Lett. **20**, 296 (1974)].
20. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
21. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988) [E. M. Belenov, P. G. Kryukov, A. V. Nazarkin, A. N. Oraevskii, and A. V. Uskov, JETP Lett. **47**, 523 1988].
22. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990) [E. M. Belenov and A. V. Nazarkin, JETP Lett. **51**, 288 (1990)].
23. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997) [S. A. Kozlov and S. V. Sazonov, JETP **84**, 221 (1997)].
24. H. Leblond, S. V. Sazonov, I. V. Mel'nikov, D. Mihalache, and F. Sanchez, Phys. Rev. A: Atomic, Molecular, and Optical Physics **74**, 063815 (2006).
25. H. Leblond and D. Mihalache, Phys. Rep. **523**, 61 (2013).
26. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. А. Шимко, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **110**, 9 (2019) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. A. Shimko, A. V. Pakhomov, and N. N. Rosanov, JETP Lett. **110**, 15 (2019)].
27. Р. М. Архипов, Письма в ЖЭТФ **113**, 636 (2021).
28. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, М. О. Жукова, А. Н. Цыпкин, Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **113**, 237 (2021) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, M. O. Zhukova, A. N. Tcyrkin, and N. N. Rosanov, JETP Lett. **113**, 242 (2021)].
29. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001) [S. V. Voronkov and S. V. Sazonov, JETP **93**, 236 (2001)].
30. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002) [A. A. Zabolotskii, JETP Lett. **76**, 607 (2002)].
31. A. A. Zabolotskii, Phys. Rev. E **67**, 066606 (2003).
32. A. V. Gulakov and S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **16**, 1733 (2004).
33. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. E **73**, 056614 (2006).
34. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen. **40**, F551 (2007).
35. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Romanian Reports in Physics **72**, 508 (2020).
36. V. V. Kozlov and N. N. Rosanov, Phys. Rev. A: Atomic, Molecular, and Optical Physics **87**, 043836 (2013).
37. V. V. Kozlov, Phys. Rev. A: Atomic, Molecular, and Optical Physics **56**, 1607 (1997).
38. М. В. Архипов, Р. М. Архипов, А. А. Шимко, И. Бабушкин, Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **109**, 657 (2019) [M. V. Arkhipov, R. M. Arkhipov, A. A. Shimko, I. V. Babushkin, and N. N. Rosanov, JETP Lett. **109**, 634 (2019)].
39. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **53**, 400 (1991) [S. V.'Sazonov, JETP Lett. **53**, 420 (1991)].
40. S. V. Sazonov, J. Phys: Condens. Matter **7**, 175 (1995).
41. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1595 (1998) [A. Yu. Parkhomenko and S. V. Sazonov, JETP **87**, 864 (1998)].
42. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **96**, 263 (2012)].
43. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **113**, 612 (2021) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **113**, 592 (2021)].
44. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Theor. **6**, L53 (1973).
45. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М. (1977) [G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (1974)].
46. S. V. Sazonov, Phys. Rev. A: Atomic, Molecular, and Optical Physics **103**, 053512 (2021).