

## Отсутствие неустойчивости тангенциального разрыва для вихревых блинов

Д. С. Агафонцев<sup>+\*1)</sup>, Е. А. Кузнецов<sup>\*×°</sup>, А. А. Майлыбаев<sup>∇</sup>

<sup>+</sup>Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

<sup>×</sup>Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

<sup>°</sup>Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

<sup>∇</sup>Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 22460-320 Rio de Janeiro, Brazil

Поступила в редакцию 17 июня 2021 г.

После переработки 24 июня 2021 г.

Принята к публикации 24 июня 2021 г.

В рамках трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера исследуются области высокой завихренности в виде блинов, возникающие при зарождении развитой гидродинамической турбулентности. Показано, что у этих областей имеется внутренняя структура, состоящая из трех вихревых слоев. Такая слоеная структура вместе с законом автомодельной эволюции блина препятствуют развитию неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

DOI: 10.31857/S1234567821140032

1. Согласно классическим работам Колмогорова и Обухова [1, 2] в режиме развитой гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса  $Re \gg 1$  флуктуации завихренности на масштабе  $l$  из инерционного интервала ведут себя как  $\langle \delta\omega \rangle \propto \varepsilon^{1/3} l^{-2/3}$ , т.е. расходятся при  $l \rightarrow 0$ ; здесь  $\varepsilon$  – темп диссипации энергии в единице объема. При этом время  $T$  перекачки энергии из больших масштабов в малые конечно и зависит только от  $\varepsilon$  и внешнего – большого – масштаба  $L$ :  $T \propto L^{2/3} \varepsilon^{-1/3}$ . Таким образом, теория Колмогорова–Обухова указывает на возможность формирования коллапса – обращения завихренности в бесконечность в некоторой точке пространства за конечное время, и этот процесс в инерционном интервале масштабов может быть изучен с помощью гидродинамики Эйлера. По-видимому, впервые этот вопрос был поднят в классической работе Л. Онзагера 1949 г. [3]; см. историю этого вопроса в статье [4] и книге [5]. В настоящее время проблема существования коллапсов является одной из центральных в теории развитой гидродинамической турбулентности. Одним из наиболее обсуждаемых типов коллапса являются сжимающиеся вихревые листы (блины) [6], которые впервые наблюдались в численных экспериментах [7].

На вихревом блине тангенциальная компонента скорости испытывает скачок  $\Delta V$  на малой толщине блина  $\ell_1$ . Если предположить, что на большом времени этот скачок остается конечным, а толщина блина стремится к нулю, то такое течение переходит в разрыв скорости, подверженный неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (КГ) [8]. Инкремент этой неустойчивости  $\gamma$  линейно растет с увеличением волнового числа  $k$  вдоль разрыва,  $\gamma = k\Delta V/2$ . Неустойчивость должна насыщаться при больших  $k$ , если толщина  $\ell_1$  конечна, так что максимум инкремента может быть оценен как  $\gamma_{\max} \sim \Delta V/\ell_1$ . Отметим, что вихревые блины обсуждались недавно в контексте развитой гидродинамической турбулентности в работе [9].

В серии численных экспериментов [9–11] мы исследовали эволюцию областей высокой завихренности в рамках несжимаемых уравнений Эйлера. Было показано, что эти области представляют собой сжимающиеся блинообразные структуры и течение вблизи них описывается локально новым точным автомодельным решением уравнений Эйлера, которое состоит из сдвигового течения и асимметричного растягивающего потока. Отметим, что впервые структуры блинного типа наблюдались в гидродинамике Эйлера в численных экспериментах М. Brachet et al. [7]. В отличие от этой работы нами было показано, что экспоненциальный рост максимума завих-

<sup>1)</sup>e-mail: dmitrij@itp.ac.ru

ренности  $\omega_{\max} = \max|\boldsymbol{\omega}| \propto e^{\beta_2 t}$  и экспоненциальное уменьшение толщины блина  $\ell_1 \propto e^{-\beta_1 t}$  характеризуются существенно различными показателями,  $\beta_2/\beta_1 \approx 2/3$ , что приводит к скейлинговому закону колмогоровского типа,

$$\omega_{\max} \propto \ell_1^{-2/3}. \quad (1)$$

Этот закон подтверждается численно для большинства блинов; кроме того, в [13] нами были приведены аналитические аргументы в пользу скейлинга (1) в рамках представления вихревых линий [14]. Число блинообразных структур растет со временем, и их вклад в спектр энергии оказывается определяющим. В частности, для некоторых начальных условий [11, 15] мы наблюдали формирование Колмогоровского спектра  $E_k \propto k^{-5/3}$  и степенных скейлингов для продольных и поперечных структурных функций скорости в полностью безвязком течении.

С учетом экспоненциального роста максимума завихренности и экспоненциального уменьшения толщины блина, максимум инкремента неустойчивости КГ для блинообразной структуры должен характеризоваться экспоненциальной зависимостью от времени,

$$\gamma_{\max} \sim \Delta V/\ell_1 \simeq \omega_{\max} \propto e^{\beta_2 t}, \quad (2)$$

что, казалось бы, указывает на двойное экспоненциальное усиление возмущения. Однако в численных экспериментах [10–13, 15] мы не наблюдали неустойчивости такого типа.

В данной работе мы приведем аргументы, объясняющие этот факт. В частности, мы покажем, что неустойчивость КГ подавляется автомодельным сдвиговым течением на блине. Кроме того, блинообразные области высокой завихренности имеют тонкую внутреннюю структуру, состоящую из трех вихревых слоев, что также может препятствовать развитию неустойчивости КГ.

**2.** Рассмотрим эволюцию блинообразных областей высокой завихренности в рамках несжимаемых уравнений Эйлера, которые в безразмерном виде записываются как

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$  – поле скорости и  $p$  – давление. Как было показано в [12], течение вблизи блина хорошо описывается следующим точным решением уравнений Эйлера,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\omega_{\max} \ell_1 f\left(\frac{x_1}{\ell_1}\right) \mathbf{n}_3 + \begin{pmatrix} -\beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 \\ \beta_3 x_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$p = -\frac{\beta_1 x_1^2}{2} - \frac{\beta_2 x_2^2}{2} - \frac{\beta_3 x_3^2}{2}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \omega_{\max} f'\left(\frac{x_1}{\ell_1}\right) \mathbf{n}_2. \quad (6)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$  – поле завихренности,  $\beta_1, \beta_2$  и  $\beta_3$  – произвольные константы такие, что  $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ , временные функции  $\omega_{\max} = \omega_0 e^{\beta_2 t}$  и  $\ell_1 = h_0 e^{-\beta_1 t}$  описывают эволюцию максимума завихренности и толщины блина, и  $f(\xi)$  – произвольная гладкая функция, максимум первой производной которой находится в нуле,  $\max f'(\xi) = f'(0) = 1$ . Решение (4)–(5) записано в декартовой системе координат, начало которой находится в максимуме завихренности, ось  $x_1$  перпендикулярна блину, и ось  $x_2$  сонаправлена с вектором завихренности; оно имеет бесконечную энергию и описывает возникающие в численных экспериментах блинообразные структуры только локально.

Решение (4)–(5) не накладывает ограничений на соотношение констант  $\beta_2/\beta_1$ , которое задает степенной скейлинг  $\omega_{\max} \propto \ell_1^{-\beta_2/\beta_1}$ . Однако, как было показано нами в работах [10, 11], большинство блинов следуют скейлингу (1), соответствующему соотношению  $\beta_2/\beta_1 = 2/3$ ; см. также [13].

**3.** В отношении возможной неустойчивости блинообразных структур высокой завихренности, во-первых, следует отметить, что задача об их устойчивости не решена до настоящего времени, так как решение (4)–(5) существенно отличается от стационарного течения в виде разрыва скорости. В частности, оно имеет стационарный растягивающий и сжимающийся сдвиговый потоки; также, оно является сильно вырожденным [13]. Эти особенности могут способствовать стабилизации течения.

Важно также, что согласно уравнению (4) изменение тангенциальной скорости на толщине блина пропорционально  $\omega_{\max} \ell_1$ , и в случае  $\beta_1 > \beta_2$  (в частности, это верно для скейлинга (1), когда  $\beta_2 = 2\beta_1/3 > 0$ ) это произведение экспоненциально убывает,  $\omega_{\max} \ell_1 \rightarrow 0$ . Это означает, что решение (4)–(5) на большом времени не переходит в разрыв скорости, так как скачок тангенциальной скорости на блине стремится к нулю.

Во-вторых, в численных экспериментах [10–13, 15] мы не видим никаких характерных признаков неустойчивости КГ. В численном моделировании использовались псевдоспектральный метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности, в ко-

тором пространственные производные считаются с помощью быстрого преобразования Фурье, и адаптивная пространственная решетка, которая автоматически подстраивается на основании анализа Фурье-спектра решения, наилучшим образом разрешая перпендикулярное направление главного блина завихренности [10]. При использовании этих методов энергия  $E = (1/2) \int \mathbf{v}^2 dx^3$  и спиральность  $\Omega = \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}) dx^3$  сохраняются с относительной точностью  $10^{-11}$ , и численные эксперименты, проведенные на существенно разных решетках, идеально сходятся друг с другом [11]. Кроме того, эксперименты, в которых используется прямое численное интегрирование уравнений Эйлера, очень хорошо сходятся с экспериментами в представлении вихревых линий [13]. Последнее обстоятельство важно с точки зрения точности и контроля численного моделирования, так как представление вихревых линий является результатом частичного интегрирования уравнений Эйлера, в котором инварианты Коши сохраняются вдоль каждой траектории вихревых линий [14].

Наиболее точные эксперименты были проведены в работах [12, 13], где для двух разных начальных течений  $I_1$  и  $I_2$  были использованы решетки с общим числом узлов  $2048^3$ . К финальному времени глобальный максимум завихренности показал рост в 12.2 и 7.6 раза соответственно, разрешение собственного направления решетки, наиболее близкого к перпендикулярному направлению главных блинов, составило более 4000 точек, и толщина главных блинов, определяемая на полувысоте завихренности, соответствовала всего 10–12 узлам решетки. Как показано в [12], во время эволюции главный блин остается параллельным самому себе и явление закручивания, характерное для неустойчивости КГ, отсутствует.

В терминах решения (4)–(5), развитие неустойчивости КГ должно приводить к появлению резких градиентов компоненты скорости  $v_1$ , перпендикулярной плоскости блина, вдоль продольного направления блина  $x_3$ . Но, как показано на рис. 1, для главного блина, развивающегося из начального течения  $I_1$ , компонента  $v_1$  близка к нулю и практически не меняется вдоль оси  $x_3$  даже в финальное время эксперимента. Наличие резких градиентов  $v_1$  вдоль  $x_3$  означало бы возбуждение высоких гармоник в поле скорости, соответствующих направлению  $k_3$ . В этом случае, в силу соотношения  $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})| = |\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{v}(\mathbf{k})|$  между Фурье-образами полей скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{k})$  и завихренности  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})$ , верного для несжимаемого течения, завихренность также должна иметь высокие гармоники вдоль направления  $k_3$ . Однако в работе [10] пока-

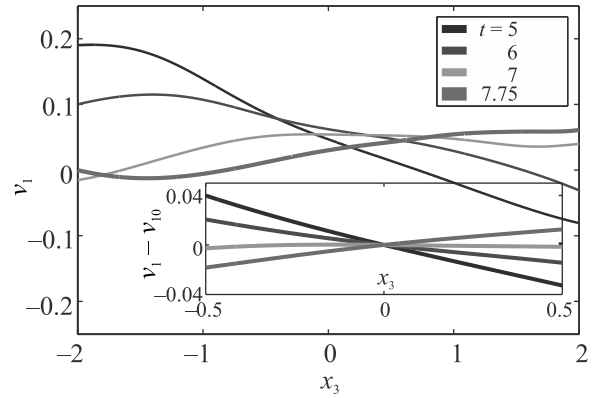


Рис. 1. (Цветной онлайн) Компонента скорости  $v_1$  вдоль оси  $x_3$  в разные моменты времени, в собственных координатах блина, соответствующих решению (4)–(5). Вставка показывает зум зависимости  $(v_1 - v_{10})$  от  $x_3$ , где  $v_{10}$  – значение первой компоненты скорости  $v_1$  при  $x_3 = 0$ . Данные взяты для главного блина, развивающегося в численном эксперименте [12]

зано, что в поле завихренности возбуждены высокие гармоники, соответствующие только перпендикулярному направлению блина  $k_1$ , но не продольному  $k_3$ .

Для других блинообразных структур высокой завихренности, развивающихся из начального течения  $I_1$ , были получены аналогичные результаты. Численные эксперименты, проведенные в [13] для начального течения  $I_2$ , а также в [11, 15] для нескольких десятков случайных начальных течений на решетках с общим числом узлов  $1024^3$ , также не выявили никаких признаков неустойчивости КГ.

В-третьих, в случае наличия неустойчивости, коэффициент усиления  $\Theta(k, t)$  гармоники возмущения  $k$  за время  $t$  должен вести себя как

$$\log \Theta(k, t) \propto k \int_0^t \Delta V(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Здесь мы предполагаем, что инкремент неустойчивости пропорционален скачку тангенциальной компоненты скорости и волновому числу,  $\gamma \propto k\Delta V$ . С учетом скейлинга (1) скачок скорости экспоненциально убывает со временем,  $\Delta V \propto \omega_{\max} \ell_1 \propto \ell_1^{1/3} \propto e^{-\beta_1 t/3} \rightarrow 0$ . Таким образом, гармоники возмущения растут медленнее, чем экспоненциально, и на большом времени коэффициент усиления насыщается,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \log \Theta(k, t) \right] \propto \frac{k}{\beta_1}. \quad (8)$$

Следовательно, если в начальном течении высокие гармоники не возбуждены (что соответствует сценарию зарождения развитой гидродинамической тур-

булентности), то из-за ограниченности коэффициента усиления (8) они останутся малыми. Эффективно это означает отсутствие неустойчивости.

Отметим, что в формуле (2) экспоненциально растущий максимум инкремента неустойчивости  $\gamma_{\max}$  действует на постоянно растущую гармонику  $k \sim 1/\ell_1$ , т.е. эта формула не описывает динамику какой-либо заданной гармоники возмущения. Напротив, следует ожидать, что растягивающие компоненты потока, действующие в плоскости блина [см. уравнение (4)], приводят к уменьшению волнового числа со временем для каждого возмущения.

В-четвертых, тонкая структура блина, задаваемая в модели (4)–(5) функцией  $f(\xi)$  и определяющая скачок тангенциальной компоненты скорости,

$$\Delta V = \omega_{\max} \ell_1 [f(-a) - f(a)], \quad (9)$$

между точками  $x_1 = \pm a \ell_1$ , также может препятствовать развитию неустойчивости КГ. Растягивающее поле скорости  $(-\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \beta_3 x_3)^T$  антисимметрично по отношению к отражению координат  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . Поэтому естественно предположить, что функция  $f(\xi)$  также может быть антисимметричной. Отметим, что к решению (4)–(5) можно добавить произвольно зависящую от времени скорость  $(0, V_2(t), V_3(t))^T$ , что приведет лишь к появлению дополнительных членов в давлении; следовательно, мы можем выбрать  $f(0) = 0$ . В простейшем варианте антисимметрии  $f(\xi)$ , в предположении, что эта функция убывает на бесконечности,  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi) = 0$ , ее производная  $f'(\xi)$  является симметричной с максимумом в точке  $\xi = 0$  и при этом имеет два отрицательных “сателлита”. Практически такие зависимости для функций  $f'(\xi)$  и  $f(\xi)$  представлены на рис. 2 для главного блина, развивающегося из начального течения  $I_1$ . На рисунке 2 для разных моментов времени показаны зависимости от  $x_1/\ell_1$  для нормированной второй компоненты завихренности  $\omega_2/\omega_{\max}$  [соответствует функции  $f'(\xi)$ ] и нормированной третьей компоненты скорости  $(v_3 - v_{30})/\omega_{\max} \ell_1$  [соответствует  $-f(\xi)$ ]; здесь  $v_{30}$  – значение третьей компоненты скорости  $v_3$  при  $x_1 = 0$ . Аналогичные зависимости наблюдаются для других блинов и других начальных течений.

Отметим, что, как следует из рис. 2, на расстояниях порядка десяти толщин блина  $x_1/\ell_1 \sim 10$  автомодельный режим эволюции течения еще нельзя считать установившимся. Поэтому нормированные скорость и завихренность на таких расстояниях плохо соответствуют функциям  $f(\xi)$  и  $f'(\xi)$ . Мы считаем, что подобное поведение связано с тем, что, как было показано в [10, 12], блинообразные структуры являются слабо искривленными, отклоняясь от плоско-

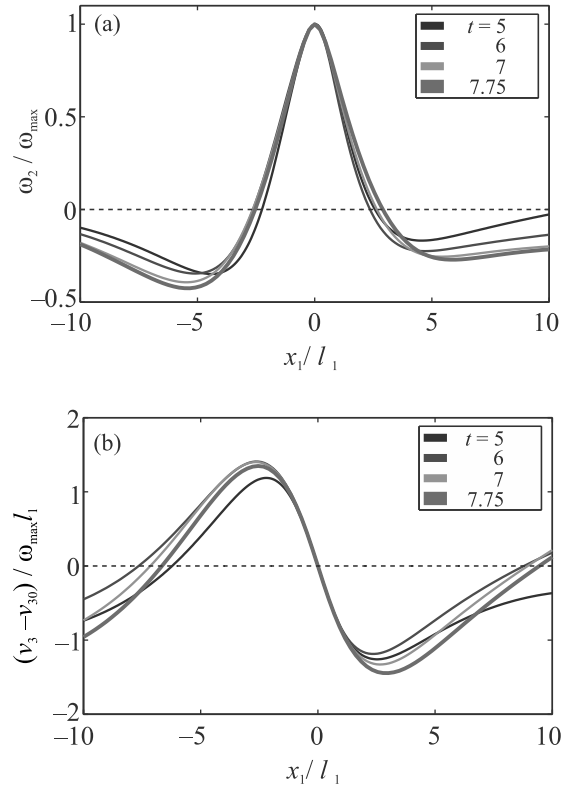


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Нормированная вторая компонента завихренности  $\omega_2/\omega_{\max}$  и (б) – нормированная третья компонента скорости  $(v_3 - v_{30})/\omega_{\max} \ell_1$  как функции  $\xi = x_1/\ell_1$  в разные моменты времени, в собственных координатах блина, соответствующих решению (4)–(5); здесь  $v_{30}$  – значение третьей компоненты скорости  $v_3$  при  $x_1 = 0$ . Черные пунктирные линии показывают нуль. Данные взяты для главного блина, развивающегося в численном эксперименте [12]

сти на расстояния, много большие толщин блина. Это приводит к воздействию разных сегментов блина друг на друга через “промежуточное” течение, что может препятствовать установлению автомодельного режима на промежуточных расстояниях между автомодельным блином на  $x_1 \sim \ell_1$  и неавтомодельной областью на  $|x_1| \gg \ell_1$ .

Таким образом, блинообразные области имеют тонкую слоеную структуру, состоящую из ярко выраженного центрального максимума завихренности и двух практически симметричных сателлитов с противоположно направленной завихренностью. Как отмечено выше, такая слоеная структура может свидетельствовать в пользу локализованности функции  $f(\xi)$ , что, в свою очередь, должно приводить к обращению скачка скорости (9), измеренного на многих толщинах блина  $a \gg 1$ , в нуль, т.е. препятствовать развитию неустойчивости КГ.

4. В настоящей работе рассмотрена возможность возникновения неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на блинообразных структурах высокой завихренности, развивающихся в рамках трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера. Показано, что такая неустойчивость не возникает в численных экспериментах, что может быть связано как с автомодельной эволюцией сдвигового течения на вихревом блине, так и с наличием у блина тонкой структуры. В частности, скачок тангенциальной компоненты скорости на блине исчезает со временем как кубический корень из толщины блина,  $\Delta V \propto \ell_1^{1/3} \rightarrow 0$ , и поэтому на больших временах структуры такого типа не переходят в тангенциальные разрывы. Также показано, что блин имеет тонкую слоеную структуру, состоящую из ярко выраженного центрального максимума завихренности и двух практически симметричных сателлитов с противоположно направленной завихренностью. Наличие такой слоеной структуры свидетельствует в пользу локализованности функции  $f(\xi)$  в решении (4)–(5), что также должно приводить к отсутствию существенного скачка тангенциальной компоненты скорости и, следовательно, способствовать подавлению неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Работа Д. С. Агафонцева и Е. А. Кузнецова была поддержана Российским научным фондом (грант 19-72-30028).

Моделирование проводилось в Новосибирском суперкомпьютерном центре (НГУ), а анализ результатов – в дата-центре IMPA (Рио-де-Жанейро). Д. С. Агафонцев благодарит IMPA за поддержку во время визитов в Бразилию. Работа

А. А. Майлыбаева осуществлялась при поддержке Национального совета по научно-техническому развитию (CNPq, гранты 303047/2018-6 и 406431/2018-3, Бразилия).

- 
1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 301 (1941).
  2. А. М. Обухов, ДАН СССР **32**, 22 (1941).
  3. L. Onsager, *Statistical hydrodynamics*, II Nuovo Cimento (1943–1954), **6**, 279 (1949).
  4. G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan, RMP **78**, 87 (2006).
  5. U. Frisch, *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
  6. P. G. Saffman, J. Fluid Mech. **106**, 49 (1981).
  7. M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, and P. L. Sulem, Phys. Fluids A **4**, 2845 (1992).
  8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Теоретическая физика, 3-е изд., перераб., Наука, М. (1986), т. VI [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics*, Elsevier, Oxford (2013), v. 6].
  9. A. Migdal, Int. J. Mod. Phys. A **36**(05), 2150062 (2021).
  10. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **27**, 085102 (2015).
  11. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Письма в ЖЭТФ **104**, 695 (2016).
  12. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, J. Fluid Mech. **813**, R1 (2017).
  13. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **30**, 095104 (2018).
  14. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
  15. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Письма в ЖЭТФ **110**, 106 (2019).