

# О магнитоэлектрической связи в $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$

М. В. Еремин<sup>1)</sup>, А. Р. Нурмухаметов<sup>1)</sup>

Институт физики Казанского (Приволжского) федерального университета, 420008 Казань, Россия

Поступила в редакцию 18 мая 2021 г.

После переработки 2 июня 2021 г.

Принята к публикации 2 июня 2021 г.

Анализируется механизм магнитоэлектрической связи спинов  $\text{Ni}^{2+}$  и  $\text{Cu}^{2+}$  с внешним электрическим полем в  $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$ , обусловленный связью  $3d$ -электронов с электрическим полем и спин-орбитальным взаимодействием. Показано, что упорядочение спинов в плоскости  $ab$  кристалла индуцирует электрическую поляризацию вдоль оси  $c$  кристалла, причем она главным образом обусловлена ионами никеля. Для получения электрической поляризации в антиферромагнетике  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  необходимо приложить внешнее магнитное поле в плоскости  $ab$ .

DOI: 10.31857/S1234567821130073

**1. Введение.** Выяснение микроскопических моделей связи спинов с электрическим полем – актуальная задача современных исследований магнитоэлектриков и мультиферроиков [1–5]. Подробный обзор предложенных механизмов магнитоэлектрической связи до 2015 г. приведен в обзоре [6]. В последние годы обнаруживаются новые соединения, для объяснения магнитоэлектрических свойств которых требуются новые микроскопические механизмы магнитоэлектрической связи. К числу таких соединений относится и  $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$ . Как уже подчеркивалось в экспериментальной работе [7], особенности связи спинов  $\text{Ni}$  и  $\text{Cu}$  с электрическим полем в этом соединении не могут быть объяснены ни моделью спиновых токов [8], ни стрикционном механизмом [9]. Авторы работы [7], в качестве возможного, указали на механизм Аримы [10], однако численных оценок параметра связи спинов никеля с электрическим полем не привели. Таким образом, проблема осталась не разрешенной. В данной работе мы приводим результаты нашего расчета связи спинов с электрическим полем, которая индуцируется взаимодействием орбитальных моментов с электрическим полем и затем передается орбитально-спиновыми взаимодействиями на спины  $\text{Ni}$  и  $\text{Cu}$ . Идея такого двухзвенного механизма обсуждалась ранее в теории электрополевого эффекта магнитного резонанса в разбавленных парамагнетиках [11]. Новизна нашего рассмотрения в этом плане связана с описанием первого звена, а именно природы связи  $3d$ -электронов с электрическим полем.

Эффективность рассматриваемого механизма зависит от особенностей энергетической структуры

магнитного иона. Согласно структурным данным [7, 12] магнитные ионы  $\text{Ni}^{2+}$  и  $\text{Cu}^{2+}$  занимают позиции с точечной группой симметрии  $S_4$ .

**2. Уровни энергии и волновые функции.** Оператор кристаллического поля имеет вид:

$$H_{cr} = B_0^{(2)}C_0^{(2)} + B_0^{(4)}C_0^{(4)} + B_4^{(4)}C_4^{(4)} + B_{-4}^{(4)}C_{-4}^{(4)}, \quad (1)$$

где  $C_q^{(k)}$  – компоненты сферических тензорных операторов кристаллического поля, действующих на состояния  $3d$ -электронов. Они связаны со сферическими функциями  $Y_{k,q}(\theta, \phi)$  соотношением:  $C_q^{(k)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \sum Y_{k,q}(\theta_i, \phi_i)$ . Индекс суммирования  $i$  относится к электронам в  $3d$ -оболочке.

Параметры кристаллического поля  $B_q^{(k)}$  рассчитывались нами с использованием модели обменных зарядов [13]. Для оценки обменного заряда на связях медь-кислород привлекались экспериментальные данные о кристаллических расщеплениях  $\text{Cu}^{2+}$  в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$ , которые получены в работе [14]. Наша теоретико-групповая интерпретация возбужденных состояний  $\text{Cu}^{2+}$  соответствует, предложенной Меньшениным [15]. В локальной системе координат с  $\text{Im}[B_4^{(4)}] = 0$  и  $\text{Re}[B_4^{(4)}] > 0$  параметры кристаллического поля оказались равными (в  $\text{см}^{-1}$ ):

$$B_0^{(2)} = -17720, \quad B_0^{(4)} = 9940, \quad B_4^{(4)} = 14030. \quad (2)$$

Ниже мы будем считать, что  $\text{Re}[B_4^{(4)}] > 0$ . Это означает, что для позиции  $A1$  локальная система координат повернута относительно кристаллографической системы на угол  $20.9^\circ$  вокруг оси  $c$  кристалла (угол отсчитывается против часовой стрелки), для позиции  $A2$  угол поворота соответственно равен

<sup>1)</sup>e-mail: meremin@kpfu.ru; alrnurmuhametov@gmail.com

–20.9°. Энергии кристаллических подуровней основного терма  $Ni^{2+}(^3F)$  и  $Cu^{2+}(^2D)$  и соответствующие им волновые функции приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

**Таблица 1.** Уровни энергии и волновые функции  $Ni^{2+}(^3F)$  в  $NiB_2O_4$

Уровни энергии, $см^{-1}$	Представления точечной группы $S_4$	Волновые функции
13943	$^2\Gamma_{34}$	$\psi_7 = C_2 -1\rangle + C_1 3\rangle$ $\psi_6 = C_2 1\rangle + C_1 -3\rangle$
13768	$\Gamma_1$	$\psi_5 =  0\rangle$
11179	$^2\Gamma_2$	$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}( 2\rangle +  -2\rangle)$
4744	$^1\Gamma_{34}$	$\psi_3 = C_1 -1\rangle - C_2 3\rangle$ $\psi_2 = C_1 1\rangle - C_2 -3\rangle$
0	$^1\Gamma_2$	$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}( 2\rangle -  -2\rangle)$

**Таблица 2.** Уровни энергии и волновые функции  $Cu^{2+}(^2D)$  в  $CuB_2O_4$ . В скобках указаны экспериментальные значения из [14]

Уровни энергии, $см^{-1}$	Представления точечной группы $S_4$	Волновые функции
15540 (15440)	$\Gamma_{34}$	$\psi_5 = \frac{i}{\sqrt{2}}( -1\rangle +  1\rangle)$ $\psi_4 = \frac{i}{\sqrt{2}}( -1\rangle -  1\rangle)$
13330 (13450)	$\Gamma_1$	$\psi_3 =  0\rangle$
11170 (11340)	$^2\Gamma_2$	$\psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}( -2\rangle -  2\rangle)$
0	$^1\Gamma_2$	$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}( 2\rangle +  -2\rangle)$

Значения коэффициентов в волновых функциях с точностью 1% равны  $C_1 \cong \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $C_2 \cong \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Как видно из таблиц 1 и 2, основными состояниями ионов никеля и меди являются орбитальные синглеты.

**3. Оператор связи  $3d$ -электронов с электрическим полем.** Эффективный оператор энергии связи  $3d$ -электронов электрическим полем записывается в виде [16, 17].

$$H_E = \sum_{k,p,t} \left\{ E^{(1)} U^{(k)} \right\}_t^{(p)} D_t^{(1k)p}. \quad (3)$$

Здесь фигурные скобки обозначают прямое произведение сферических компонент электрического поля  $E_0^{(1)} = E_z$ ;  $E_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x \pm i \cdot E_y)$  с компонентами единичного тензорного оператора  $U^{k,p}$  принимает значения 1, 3 и 5,  $k$  – четные числа 2 и 4. Ве-

личины  $D_t^{(1k)p}$  определяются двумя вкладками. Первый из них обусловлен смешиванием состояний электронных конфигураций  $3d^N$  и  $3d^{(N-1)}4p$  нечетным кристаллическим полем, а второй связан с процессами переноса заряда от ионов кислорода в  $3d$ -болочку иона. Общие выражения для расчета те же самые, что и в [16, 17]. В локальной системе координат для позиции  $CuA1$  рассчитанные параметры оказались равными (в атомных единицах, а. у.):

$$\begin{aligned} D_2^{(12)3} &= 0.018 + 0.164i, \\ D_2^{(14)3} &= -0.110 - 0.055i, \\ D_2^{(14)5} &= -0.015 - 0.02i. \end{aligned} \quad (4)$$

#### 4. Оператор связи спинов основного состояния с электрическим полем.

**4.1.  $Ni^{2+}(^3F)$ .** В третьем порядке теории возмущений имеются три типа процессов виртуальных возбуждений, приводящих к связи спинов с электрическим полем. Они поясняются на рис. 1.

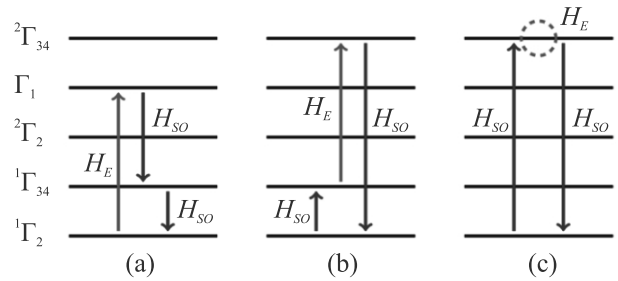


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схемы виртуальных возбуждений  $Ni^{2+}(^3F)$

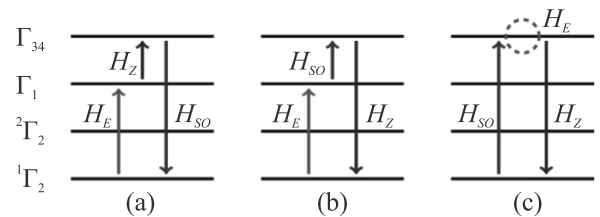


Рис. 2. (Цветной онлайн) Схемы виртуальных возбуждений  $Cu^{2+}(^2D)$

В процессе возбуждения типа (а) из-за взаимодействия с электрическим полем (оператор  $H_E$ ) происходит переход из основного состояния в возбужденное состояние  $\Gamma_1$ , затем из-за спин-орбитального взаимодействия в состояние  $^1\Gamma_{34}$  и потом в основное  $^1\Gamma_2$ . При этом промежуточное состояние  $^1\Gamma_{34}$  может быть заменено на  $^2\Gamma_{34}$ . Учитывая также процессы, сопряженные описанным, получаем эффективный оператор:

$$H_{\text{eff}}^{(a)} = i \frac{\lambda_{Ni}^2 D_z^{(a)}}{E(\Gamma_1)} \left( \frac{C_1 (\sqrt{15}C_1 + 3C_2)}{E(\Gamma_{34})} + \frac{C_2 (\sqrt{15}C_2 - 3C_1)}{E(\Gamma_{34})} \right) (S_+^2 - S_-^2) E_z, \quad (5)$$

где  $S_+$  и  $S_-$  – операторы повышения и понижения спина, соответственно, и введено следующее обозначение:

$$D_z^{(a)} = \text{Im} \left[ \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{21}} D_{-2}^{(12)3} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{35}} D_{-2}^{(14)3} + \frac{1}{30} D_{-2}^{(14)5} \right]. \quad (6)$$

На рисунке 1b изображен второй возможный процесс: возбуждение вначале индуцируется спин-орбитальным взаимодействием (оператор  $H_{SO}$ ) на  ${}^1\Gamma_2$ , затем происходит переход из-за взаимодействия с электрическим полем на  ${}^2\Gamma_2$  и на третьем этапе под действием спин-орбитального взаимодействия – в основное состояние  ${}^1\Gamma_2$ . Соответствующий этому типу процессов оператор связи спинов с электрическим полем записывается следующим образом:

$$H_{\text{eff}}^{(b)} = \frac{\lambda_{Ni}^2 (\sqrt{5}C_1 + \sqrt{3}C_2) (\sqrt{3}C_1 - \sqrt{5}C_2)}{2E(\Gamma_{34}) E(\Gamma_{34})} \left( (S_+^2 + S_-^2) \text{Re} [D_z^{(b)}] + i (S_+^2 - S_-^2) \text{Im} [D_z^{(b)}] \right) E_z, \quad (7)$$

$$D_z^{(b)} = (C_1^2 - C_2^2) \left[ -\frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{21}} D_{-2}^{(12)3} - \sqrt{\frac{1}{35}} D_{-2}^{(14)3} + \frac{1}{5} D_{-2}^{(14)5} \right] + C_1 C_2 \left[ -\frac{2}{5} \sqrt{\frac{1}{35}} D_{-2}^{(12)3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{21}} D_{-2}^{(14)3} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{15}} D_{-2}^{(14)5} \right]. \quad (8)$$

Третий тип процессов на рис. 1c реализуется через орбитально вырожденные состояния  ${}^2\Gamma_{34}$  (а также через  ${}^1\Gamma_{34}$ ), в базе которых имеются матричные элементы от оператора  $H_E$ . Соответствующий оператор связи спинов с электрическим полем записывается в виде:

$$H_{\text{eff}}^{(c)} = -\frac{\lambda_{Ni}^2}{4} \left( \frac{(\sqrt{5}C_1 + \sqrt{3}C_2)^2 \left( (S_+^2 + S_-^2) \text{Re} [D_z^{(c_1)}] + i (S_+^2 - S_-^2) \text{Im} [D_z^{(c_1)}] \right)}{E(\Gamma_{34})^2} + \frac{(\sqrt{3}C_1 - \sqrt{5}C_2)^2 \left( (S_+^2 + S_-^2) \text{Re} [D_z^{(c_2)}] + i (S_+^2 - S_-^2) \text{Im} [D_z^{(c_2)}] \right)}{E(\Gamma_{34})^2} \right) E_z, \quad (9)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} D_z^{(c_1)} &= C_1^2 D_1 + C_1 C_2 D_2, \\ D_z^{(c_2)} &= C_2^2 D_1 - C_1 C_2 D_2, \\ D_1 &= -\frac{2}{5} \sqrt{\frac{1}{35}} D_{-2}^{(12)3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{21}} D_{-2}^{(14)3} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{15}} D_{-2}^{(14)5}, \\ D_2 &= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{1}{21}} D_{-2}^{(12)3} + 2 \sqrt{\frac{1}{35}} D_{-2}^{(14)3} - \frac{2}{5} D_{-2}^{(14)5}. \end{aligned} \quad (10)$$

4.2.  $Cu^{2+}({}^2D)$ . Отметим, что описанные выше операторы можно рассмотреть и в случае иона  $Cu^{2+}({}^2D)$  для соединения  $CuB_2O_4$ . Однако, как нетрудно убедиться, для ионов с  $S = 1/2$  все матричные элементы операторов  $S_+^2$  и  $S_-^2$  равны нулю. Это

объясняет резкое усиление связи спинов с электрическим полем в кристаллах  $CuB_2O_4$  при замене ионов  $Cu^{2+}({}^2D)$  на ионы  $Ni^{2+}({}^3F)$ , обнаруженное в работе [7]. Происхождение магнитоэлектрической связи в  $CuB_2O_4$  мы можем также объяснить виртуальными процессами возбуждения иона меди (появляются на рис. 2). Комбинируя в третьем порядке теории возмущений операторы  $H_E$ ,  $H_{SO}$  и оператор взаимодействия орбитального момента меди с индукцией магнитного поля, получаем эффективный оператор энергии связи:

$$H_{\text{eff}}^{Cu} = \frac{\lambda_{Cu} \mu_B d_z^{(a)}}{E(\Gamma_1) E(\Gamma_{34})} [S_+ B_+ + S_- B_-] E_z - \frac{\lambda_{Cu} \mu_B}{2E(\Gamma_{34})^2} [d_{z_-}^{(b)} S_+ B_+ + d_{z_+}^{(b)} S_- B_-] E_z, \quad (11)$$

где  $B_+ = B_x + iB_y$ ,  $B_- = B_x - iB_y$ , а параметры, описывающие связь  $3d$ -электронов с электрическим полем, определяются выражениями:

$$d_z^{(a)} = \text{Re} \left[ -2\sqrt{\frac{1}{35}}D_2^{(12)3} + \sqrt{\frac{1}{21}}D_2^{(14)3} - \sqrt{\frac{1}{15}}D_2^{(14)5} \right],$$

$$d_{z\pm}^{(b)} = \sqrt{\frac{1}{35}}D_{\pm 2}^{(12)3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{21}}D_{\pm 2}^{(14)3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}D_{\pm 2}^{(14)5}. \quad (12)$$

**5. Обсуждение результатов.** Из выражений (5), (7) и (9) видно, что спонтанное упорядочение спинов Ni (или внешнее магнитное поле) в плоскости  $ab$  кристалла индуцирует возникновение электрической поляризации вдоль оси  $c$ . Этот результат нашего расчета соответствует экспериментальным данным [7]. Далее перейдем к численным оценкам входящих в (5), (7), (9) величин.

Подставляя (4) в (6), (8) и (10), получаем (в а. у.):  $D_z^{(a)} = -0.006$ ,  $D_z^{(b)} = -0.012 + 0.007i$ ,  $D_z^{(c_1)} = -0.019 + 0.016i$ ,  $D_z^{(c_2)} = 0.004 - 0.013i$ . Используя эти величины и значения энергетических интервалов из таблицы 1, по формулам (5), (7), (9) получаем вид оператора связи спинов Ni с электрическим полем в расчете на один ион Ni:

$$H_{\text{eff}}^{\text{Ni}} = d_1^{\text{Ni}} (S_+^2 + S_-^2) E_z + id_2^{\text{Ni}} (S_+^2 - S_-^2) E_z, \quad (13)$$

где  $d_1^{\text{Ni}} = 0.00114$  а.у.,  $d_2^{\text{Ni}} = -0.00115$  а.у.

Умножив эти значения на число ионов никеля ( $N = 2.54 \cdot 10^{21}$  см $^{-3}$ ), соответствующих антиферромагнитно упорядоченной подрешетке спинов, в позициях  $4b$ , получаем коэффициенты макроскопической электрической поляризации  $P_1 = d_1^{\text{Ni}} N = 24.4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ ,  $P_2 = d_2^{\text{Ni}} N = -24.7 \mu\text{C}/\text{m}^2$ .

Максимальное значение макроскопической электрической поляризации в  $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$ , зарегистрированное в работе [7], равно  $3.5 \mu\text{C}/\text{m}^2$  для концентрации никеля 2.7%.

Таким образом, мы убеждаемся, что рассмотренный нами механизм вполне объясняет происхождение связи спинов иона никеля с электрическим полем.

Что касается механизма Аримы [10], то его можно оценить следующим образом: в формулах [10] так же, как и в (5), (7), (9) фигурирует параметр спин-орбитальной связи, умноженный на квадрат коэффициента перед антисвязывающей орбиталью ( $\lambda_\sigma \sim 0.2$ ). При этом вместо энергии возбуждения иона Ni в формулах (5), (7), (9) будет фигурировать энергия переноса заряда из  $2p$ -оболочки кислорода в  $3d$ -оболочку никеля (меди), а это примерно  $80000$  см $^{-1}$  [18]. Кроме того, в формулах Аримы [10] не принимается во внимание фактор усиления действия

электрического поля на орбитальный момент  $3d$ -электрона, связанный с нечетным кристаллическим полем. Суммируя сказанное, приходим к выводу, что параметр связи спина с электрическим полем по механизму Аримы примерно на 2–3 порядка меньше измеренного в  $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$  и может быть отброшен не только в случае  $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$ , но и в других оксидах с незаполненными  $3d$ -оболочками.

Как отмечалось выше, связь спинов меди с электрическим полем по механизмам (5), (7), (9) отсутствует. Этот вывод соответствует результатам работы [19], в которой магнитоэлектрическая связь в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  не была обнаружена, хотя для этого предпринимались специальные исследования. Позже в работе [20] сообщалось, что электрическая поляризация в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  вдоль оси  $c$  кристалла возникает, если приложить внешнее магнитное поле в плоскости  $ab$ .

Из (11) видно, что индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$ , лежащая в плоскости  $ab$ , индуцирует электрическую поляризацию вдоль оси  $c$  кристалла. Перепишем (11), используя аналогичные (13) обозначения:

$$H_{\text{eff}}^{\text{Cu}} = d_1^{\text{Cu}} [S_+ B_+ + S_- B_-] E_z + id_2^{\text{Cu}} [S_- B_- - S_+ B_+] E_z, \quad (14)$$

где  $d_1^{\text{Cu}} = 3.9 \cdot 10^{-8}$  а.у.,  $d_2^{\text{Cu}} = 2.8 \cdot 10^{-8}$  а.у. Коэффициенты макроскопической электрической поляризации в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$ , индуцированной внешним магнитным полем в плоскости  $ab$  равны:  $P_1^{\text{Cu}} = d_1^{\text{Cu}} N = 0.0008 \mu\text{C}/\text{T} \cdot \text{m}^2$ ,  $P_2^{\text{Cu}} = d_2^{\text{Cu}} N = 0.0006 \mu\text{C}/\text{T} \cdot \text{m}^2$ . Таким образом, поляризация может проявиться лишь в сильных магнитных полях порядка  $10 T$ , либо при допировании  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  редкоземельными ионами с большими магнитными моментами, как это происходит в кристаллах  $\text{DyCrO}_4$  [21].

**6. Заключение.** В настоящем письме предложен механизм магнито-электрической связи спинов  $\text{Ni}^{2+}$  с внешним электрическим полем в  $(\text{Ni}, \text{Cu})\text{V}_2\text{O}_4$ , обусловленный совместным действием нечетного кристаллического поля и спин-орбитального взаимодействия. Показано, что упорядочение спинов никеля в плоскости  $ab$  кристалла при антиферромагнитном упорядочении или под действием внешнего магнитного поля индуцирует электрическую поляризацию вдоль оси  $c$  кристалла. Оцененное значение электрической поляризации соответствует по порядку величины имеющимся экспериментальным данным. Оценена связь спинов ионов меди в  $\text{CuV}_2\text{O}_4$  с электрическим и магнитными полями. Очевидно, что описанная нами схема расчета применима для широкого круга магнетиков, в которых магнитные ионы находятся в позициях без центра инверсии.

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

1. Y. Tokura, *Science* **312**, 1481 (2006).
2. S.W. Cheong and M. Mostovoy, *Nat. Matter* **6**, 13 (2007).
3. D. Khomskii, *Physics* **2**, 20 (2009).
4. A.P. Pyatakov and A.K. Zvezdin, *Phys. Usp.* **55**, 557 (2012).
5. Y. Tokura, S. Seki, and N. Nagaosa, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 076501 (2014).
6. D. Shuai, L. Jun-Ming, C. Sang-Wook, and R. Zhifeng, *Adv. Phys.* **64**, 519 (2015).
7. N. D. Khanh, N. Abe, K. Kubo, M. Akaki, M. Tokunaga, T. Sasaki, and T. Arima, *Phys. Rev. B* **87**, 184416 (2013).
8. H. Katsura, N. Nagaosa, and A. V. Balatsky, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 057205 (2005).
9. A. Sergienko and E. Dagotto, *Phys. Rev. B* **73**, 094434 (2006).
10. T. Arima, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 073702 (2007).
11. W.B. Mims, *The Linear Electric Field Effect in Paramagnetic Resonance*, Clarendon, Oxford (1976).
12. M. Martinez-Ripoll, S. Martínez-Carrera, and S. García-Blanco, *Acta Crystallogr. B* **27**, 677 (1971).
13. B.Z. Malkin, in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by A.A. Kaplyanskii and R.M. Macfarlane, Elsevier, Amsterdam (1987), v. 21, ch. 2, p. 13.
14. R.V. Pisarev, A.M. Kalashnikova, O. Schöps, and L.N. Bezmaternykh, *Phys. Rev. B* **84**, 075160 (2011).
15. В.В. Меньшенин, *ЖЭТФ* **151**, 326 (2017).
16. М.В. Еремин, *ЖЭТФ* **156**, 1084 (2019).
17. M. V. Eremin, *Phys. Rev. B* **100**, 140404 (2019).
18. J. Simonetti and D.S. McClure, *Phys. Rev. B* **16**, 3887 (1977).
19. G. Nénert, L.N. Bezmaternykh, A.N. Vasiliev, and T. T. M. Palstra, *Phys. Rev. B* **76**, 144401 (2007).
20. S. Toyoda, N. Abe, and T. Arima, *Phys. Rev. B* **93**, 201109(R) (2016).
21. M. V. Eremin, *Phys. Rev. B* **102**, 104107 (2020).