Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 9, с. 620 – 623

О неаддитивной анизотропной релятивистской гидродинамике

А. В. Леонидов[1)]

Физический институт им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 февраля 2021 г.
После переработки 5 апреля 2021 г.
Принята к публикации 5 апреля 2021 г.

Описано неаддитивное обобщение релятивистской анизотропной гидродинамики. Для частного случая $0+1$ буст-инвариантной гидродинамики вычислен вклад неаддитивности в производство энтропии.

DOI: 10.31857/S1234567821090093

Разработка самосогласованной физической картины ультрарелятивистских соударений тяжелых ионов по-прежнему представляет собой чрезвычайно трудную задачу, см., например, четкое описание некоторых важнейших ее аспектов в [1]. Целью настоящей работы является построение теоретического описания рождающейся в таких соударениях анизотропной сильновзаимодействующей материи, основанного на соответствующем обобщении релятивистской гидродинамики.

Фундаментальной причиной сильной импульсной анизотропии материи, рождающейся на ранней и промежуточной стадиях соударений тяжелых ионов при высоких энергиях, считается сильная анизотропия глазмы [2] – плотной глюонной среды, рождающейся на их ранней стадии. Физическим механизмом, отвечающим за рождение глазмы, является формирование хромомагнитных токовых трубок. Как следствие, продольное P_L и поперечное P_T давления сильно разбаланисированы, причем $P_T > P_L$. Простейшим способом учета этой импульсной анизотропии является обращение к анизотропной гидродинамике, см., например, недавний обзор [3]. Идея подхода состоит в том, чтобы перевыразить импульсную анизотропию в терминах анизотропии давления и построить гидродинамическое описание, используя соответствующую модификацию тензора энергии – импульса. Для рассматриваемого ниже случая $0+1$ гидродинамики симметрийные соображения приводят к следующему выражению для тензора энергии – импульса:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P_T)u^\mu u^\nu - P_T g^{\mu\nu} + (P_L - P_T)z^\mu z^\nu, \quad (1)$$

где ϵ – плотность энергии, u^μ – 4-вектор скорости и, при оси соударений, направленной вдоль z, $z^\mu = (0,0,0,1)$. В изотропном случае $P_L = P_T$ и тензор энергии-импульса (1) принимает знакомую из релятивистской гидродинамики форму. Отметим, что наличие анизотропии давления приводит к новым интересным эффектам, таким как, например, модификация конуса Маха [4].

Ниже мы будем придерживаться подхода к конструированию такой анизотропной гидродинамики, основанном на кинетической теории [5, 6][2)]. Идея подхода состоит в явном выводе выражения для тензора энергии – импульса с использованием анизотропной функции распределения и последующем выводе уравнений гидродинамики в рамках стандартной для статистической физики процедуры, связывающей кинатическую теорию и гидродинамику.

Второе существенное для настоящего анализа обстоятельство состоит в том, что обсуждаемая материя является плотной и сильновзаимодействующей. Стандартная формулировка статистической физики основана на предположении об аддитивности энергий и энтропий физически малых объемов. Следствием этого являются, в частности, больцмановское распределение по энергиям этих объемов в каноническом формализме и аддитивность их энергий и энтропий. Фундаментом такого предположение является предположение о том, что энергия взаимодействия материи в соседних объемах вблизи поверхности, которая их разделяет, пренебрежимо мала что, в свою очередь, отвечает предположению о наличии режима слабой связи. С фундаментальной точки зрения можно ожидать, что для сильновзаимодействующих систем энергия и энтропия не могут быть аддитивными, что требует для их описания построения соответствующей модификации статистической физики. Одно из таких возможных обобщений, которое привлекло большое внимание, – это неаддитивная формулировка статистической механики, разра-

[1)]e-mail: leonidovav@lebedev.ru

[2)]Подробное обсуждение можно найти в [7].

ботанная Тсаллисом, см. книгу [8] и ссылки в ней[3]). Следствия применения такого формализма к множественному рождению частиц в соударениях тяжелых ионов, в частности – для описания спектров по поперечным импульсам, обсуждаются, в частности, в [10–13]. Неаддитивное обобщение гидродинамик, основанное на соответствующем обобщении кинетического уравнения Больцмана [14], было построено в [15, 16][4]).

Поскольку целью настоящей работы является одновременный учет импульсной анизотропии и неаддитивности, для построения неаддитивной анизоторпной гидродинамики нам необходимо рассмотреть неаддитивное уравнение Больцмана для анизотропной по импульсам функции распределения. В используемом ниже приближении времени релаксации соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$p^\mu \partial_\mu \left[f(x,p)^q\right] = -\frac{p^\mu u_\mu}{\tau_{\rm eq}} \left[f^q(x,p,\xi|\Lambda) - f^q_{\rm eq}(x,p|\Lambda_{\rm eq})\right], \tag{2}$$

где q – параметр распределения Тсаллиса, контролирущий степень неаддитивности (см. ниже уравнение (5)), $\tau_{\rm eq}$ – время релаксации и предполагается анзац Ромашке–Стрикланда [19] для анизотропной функции распределения $f(x,p,\xi|\Lambda)$

$$f(x,p,\xi|\Lambda) = f_{\rm iso}\left(\frac{\mathbf{p}^2 + \xi p_z^2}{\Lambda^2}\right), \tag{3}$$

где, в свою очередь, $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$ – зависящие от времени параметры, контролирующие степень импульсной анизотропии и импульсный масштаб соответственно, и мы предположили, что функция распределения анизотропна только в продольном направлении. Функция

$$f_{\rm eq}(x,p,|\Lambda_{\rm eq}) = f_{\rm iso}\left(\mathbf{p}^2/\Lambda^2_{\rm eq}\right) \tag{4}$$

отвечает стационарному изотропному состоянию, характеризующемуся эффективной импульсной шкалой $\Lambda_{\rm eq}$. В стандартной статистической физике распределение (4) – это распределение Больцмана и $\Lambda_{\rm eq}$ – это температура. Для рассматриваемого неаддитивного кинетического формализма предполагается, что стационарное распределение $f_{\rm eq}(x,p|\Lambda_{\rm eq})$ имеет тсаллисовскую форму

$$f_{\rm eq}(x,p) = \left[1-(1-q)\mathbf{p}^2/\Lambda^2_{\rm eq}\right]^{1/(1-q)}. \tag{5}$$

В пределе $q\to 1$ восстанавливается обычное распределение Больцмана, использовавшееся в [5, 6].

[3])Недавнее обсуждение можно найти в [9].

[4])Альтернативная конструкция была предложена в [17, 18].

Ключевыми величинами для построения неаддитивной гидродинамики с использованием кинетического формализма являются обобщенные ток частиц N^μ, тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и ток энтропии S^μ:

$$N^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu f(x,p)^q, \tag{6}$$

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu p^\nu f(x,p)^q, \tag{7}$$

$$S^\mu = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu \left[f(x,p)^q \ln_q f(x,p) - f(x,p)\right], \tag{8}$$

где

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}. \tag{9}$$

Отметим, что в литературе [14–16] можно встретить различные предположения относительно тока энтропии. Выражение в (8) отвечает выбору, сделанному в [15, 16].

Чтобы обеспечить сохранение энергии-имульса, мы будем использовать нормировочное условие Ландау (см., например, [3, 15, 16]) для энергии $\epsilon = T^{00}$

$$\epsilon(\xi,\Lambda) = \epsilon_{\rm eq}(\Lambda_{\rm eq}), \tag{10}$$

где вычисления в левой и правый частях (10) делаются с использованием функций распределения (3) и (4) соответственно. В результате получаем следующее нормировочное условие на $\Lambda_{\rm eq}$ и Λ:

$$\Lambda_{\rm eq} = \mathcal{R}(\xi)^{1/4}\Lambda, \quad \mathcal{R}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{\arctan\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\right). \tag{11}$$

В этой работе, следуя [15, 16], мы рассмотрим буст-инвариантную $0+1$-мерную гидродинамику, в которой все величины зависят только от собственного времени τ для милновских координат (τ,η), определенных соотношениями

$$t = \tau\cosh\eta, \quad z = \tau\sinh\eta. \tag{12}$$

Уравнениям гидродинамики отвечают уравнения Больцмана для двух низших моментов, отвечающих токам частиц и энергии – импульса (6), (7). Легко проверить, что вычисления для неаддитивного случая аналогичны вычислениям в [5] и приводят к тем же уравнениям эволюции для Λ и ξ:

$$\begin{gathered}\partial_\tau \xi = \frac{2(1+\xi)}{\tau} - \frac{4(1+\xi)}{\tau_{\rm eq}}\mathcal{R}(\xi)\mathcal{G}(\xi),\\ \partial_\tau\Lambda = \frac{1+\xi}{\tau_{\rm eq}}\mathcal{R}'(\xi)\mathcal{G}(\xi)\Lambda,\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\mathcal{G}(\xi) = \frac{\mathcal{R}^{3/4}(\xi)\sqrt{1+\xi}-1}{2\mathcal{R}(\xi)+3(1+\xi)\mathcal{R}'(\xi)}. \tag{14}$$

Подчеркннем, что выражения для плотности частиц (6) и тензора энергии – импульса (7) в неаддитивном случае, разумеется, отличаются от их аддитивных аналогов.

Обратимся теперь к анализу эволюции плотности энтропии $S \equiv S^0$. При выполнении вычислений удобно явно выделить зависимость от параметра анизотропии

$$S(\xi, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} S_{\rm iso}(\Lambda), \tag{15}$$

где

$$S_{\rm iso}(\Lambda) = \frac{\Lambda^3}{(2\pi)^2} \int dw\; w^{1/2}\left[f^q_{\rm iso}(w)\ln_q f_{\rm iso}(w) - f_{\rm iso}(w)\right] \tag{16}$$

и $w = p^2/\Lambda^2$. Перепишем уравнение для $\partial_\tau S$ в следующем виде:

$$\partial_\tau S = \Delta_0(\tau) + (q-1)\Delta_q(\tau), \tag{17}$$

где мы разделили аддитивный $\Delta_0(\tau)$ и неаддитивный $(q-1)\Delta_1(\tau)$ вклады, так что в аддитивном пределе $q \to 1$ остается только первый из них. В результате вычислений получаем

$$\begin{aligned}\Delta_0(\tau) &= -\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi}(\partial_\tau \xi) - \frac{3}{\Lambda}(\partial_\tau \Lambda)\right] S,\\ \Delta_q(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\frac{2}{\Lambda}\partial_\tau \Lambda \int dw\; w^{1/2}\; {\rm Ln}_q f_{\rm iso}(w),\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\mathrm{Ln}_q\; f_{\rm iso}(w) \equiv q\,\frac{f^q_{\rm iso}(w)-1}{q-1}. \tag{19}$$

Используя (13), окончательно получаем

$$\Delta_0(\tau) = \frac{1}{\tau_{\rm eq}}\left[\mathcal{R}^{3/4}(\xi)\sqrt{1+\xi} - 1\right] S, \tag{20}$$

$$\Delta_q(\tau) = \sqrt{1+\xi}\,\frac{1}{\tau_{\rm eq}}\mathcal{R}'(\xi)\mathcal{G}(\xi)\int dw\, w^{1/2}\, {\rm Ln}_q f_{\rm iso}(w). \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) составляют главный результат настоящей работы: учет неаддитивности при описании коллективных свойств анизотропной гидродинамики приводит к наличию дополнительного источника производства энтропии (21) относительно ранее известного [5] вклада (20), обусловленного только наличием импульсной анизотропии. Для количественной оценки значения нового источника энтропии в процессах множественного рождения частиц в ультрарелятивистских соударениях тяжелых ионов потребуются детальные численные вычисления. Этот анализ является важной задачей для дальнейшей работы.

Работа была поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 18-02-40131.

1. F. Gelis, arXiv:2102.07604 [hep-ph].
2. T. Lappi and L. McLerran, Nucl. Phys. A **772**, 200 (2006); doi:10.1016/j.nuclphysa.2006.04.001; arXiv:hep-ph/0602189 [hep-ph].
3. M. Alqahtani, M. Nopoush, and M. Strickland, Prog. Part. Nucl. Phys. **101**, 204 (2018); doi:10.1016/j.ppnp.2018.05.004; arXiv:1712.03282 [nucl-th].
4. M. Kirakosyan, A. Kovalenko, and A. Leonidov, Eur. Phys. J. C **79**(5), 434 (2019); doi:10.1140/epjc/s10052-019-6919-9; arXiv:1810.06122 [hep-ph].
5. M. Martinez and M. Strickland, Nucl. Phys. A **848**, 183 (2010); doi:10.1016/j.nuclphysa.2010.08.011; arXiv:1007.0889 [nucl-th].
6. M. Martinez and M. Strickland, Phys. Rev. C **81**, 024906 (2010); doi:10.1103/PhysRevC.81.024906; arXiv:0909.0264 [hep-ph].
7. E. Molnar, H. Niemi, and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **93**(11), 114025 (2016); doi:10.1103/PhysRevD.93.114025; arXiv:1602.00573 [nucl-th].
8. C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*, Springer Science & Business Media, Berlin/Heidelberg (2009).
9. C. Tsallis, Entropy **21**, 696 (2019).
10. J. Cleymans, G. I. Lykasov, A. S. Parvan, A. S. Sorin, O. V. Teryaev, and D. Worku, Phys. Lett. B **723**, 351 (2013); doi:10.1016/j.physletb.2013.05.029; arXiv:1302.1970 [hep-ph].
11. J. Cleymans, M. D. Azmi, A. S. Parvan, and O. V. Teryaev, EPJ Web Conf. **137**, 11004 (2017); doi:10.1051/epjconf/201713711004.
12. K. Shen, G. G. Barnaföldi, and T. S. Biró, Universe **5**(5), 122 (2019); doi:10.3390/universe5050122; arXiv:1905.08402 [hep-ph].
13. G. Bíró, G. G. Barnaföldi, and T. S. Biró, J. Phys. G **47**(10), 105002 (2020); doi:10.1088/1361-6471/ab8dcb; arXiv:2003.03278 [hep-ph].
14. A. Lavagno, Phys. Lett. A **301**, 13 (2002); doi:10.1016/S0375-9601(02)00964-7; arXiv:cond-mat/0207353 [cond-mat.stat-mech].
15. T. S. Biro and E. Molnar, Phys. Rev. C **85**, 024905 (2012); doi:10.1103/PhysRevC.85.024905; arXiv:1109.2482 [nucl-th].
16. T. S. Biró and E. Molnár, Eur. Phys. J. A **48**, 172 (2012); doi:10.1140/epja/i2012-12172-8; arXiv:1205.6079 [nucl-th].
17. T. Osada and G. Wilk, Phys. Rev. C **77**, 044903 (2008); erratum: Phys. Rev. C **78**, 069903 (2008); doi:10.1103/PhysRevC.77.044903; arXiv:0710.1905 [nucl-th].

18. T. Osada and G. Wilk, Indian J. Phys. **85**, 941 (2011); doi:10.1007/s12648-011-0103-x; arXiv:0805.2253 [nucl-th].
19. P. Romatschke and M. Strickland, Phys. Rev. D **68**, 036004 (2003); doi:10.1103/PhysRevD.68.036004; arXiv:hep-ph/0304092 [hep-ph].