Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 6, с. 410 – 414 © 2021 г. 25 марта

Метод Фока–Швингера в случае неравных масс

А. А. Осипов[1)]

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 10 февраля 2021 г.
После переработки 10 февраля 2021 г.
Принята к публикации 19 февраля 2021 г.

Результат устранения из спектра теории тяжелых частиц неравной массы может быть описан при низких энергиях эффективным действием, представляющим собой асимптотический ряд по обратным степеням массы. Мы показываем, каким образом можно вычислить первые члены асимптотического ряда на основе формализма собственного времени: метода Фока–Швингера. Для иллюстрации подхода рассматривается теория с нарушенной $U(3) \times U(3)$ киральной симметрией. Показано, что невырожденность масс порождает множество вершин, описывающих следствия явного нарушения ароматической симметрии, которые, как правило, не возникают при менее строгом рассмотрении проблемы. Результат может использоваться при изучении теорий со спонтанно нарушенной симметрией и при построении эффективных теорий стандартной модели.

DOI: 10.31857/S123456782106001X

Понятие собственного времени было введено в квантовую теорию в работах Фока [1, 2] и Швингера [3]. В сочетании с методом фонового поля это позволило ДеВитту разработать явно ковариантный подход к калибровочной теории поля [4] и квантовой гравитации [5]. Метод применим в любой теории поля, но особое значение он приобретает при необходимости обеспечить явную ковариантность вычислений на всех этапах. Во всех упомянутых выше случаях и во многих других [6, 7] возникает задача вычисления детерминанта положительно определенного эллиптического оператора, описывающего квадратичные флуктуации квантовых полей во внешнем фоновом поле. Результатом, как правило, является асимптотическое разложение эффективного действия по степеням собственного времени с коэффициентами Сили–ДеВитта $a_n(x, y)$, которые зависят от фоновых полей. Примечательно, что каждый член разложения инвариантен относительно действия группы внутренней симметрии. Это следует из общей ковариантности формализма. В настоящее время асимптотические коэффициенты a_n хорошо известны вплоть до значений $n = 5$ для произвольного оператора типа Лапласа, и детали их вычислений можно найти, например, в работах [6–8].

Если квантовые поля имеют большие и равные массы m, то легко перейти от разложения по степеням собственного времени к разложению по обратным степеням массы, которое справедливо, когда все фоновые поля и их производные малы по сравнению с массой квантового поля. В этом случае асимптотические коэффициенты a_n не меняются. Такое длинноволновое ($\lambda \gg 1/m$) разложение позволяет получить эффективное действие, описывающее лидирующий низкоэнергетический эффект от учета виртуальных вкладов тяжелых состояний. Этот сценарий часто реализуется в теориях со спонтанно нарушенной симметрией или в теориях с тяжелыми виртуальными частицами. Типичным примером теорий первого типа является модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [9, 10], в которой основное состояние в режиме сильной связи оказывается отделенным щелью от возбужденных квазичастиц – нуклонов. В кварковой интерпретации модели можно получить низкоэнергетическое эффективное мезонное действие, порождаемое кирально симметричными четырехкварковыми взаимодействиями [11]. Здесь особенно полезен метод разложения по собственному времени [12, 13]. Примеры второго типа возникают, в частности, при эффективном расширении некоторой теории поля X с группой симметрии G до следующей теории X', когда X' содержит тяжелые степени свободы, принадлежащие некоторому представлению группы G. В настоящее время такие теории активно изучаются в контексте расширения стандартной модели электрослабых взаимодействий [14].

В указанных выше исследованиях нередко необходимо решать задачу построения эффективной теории, возникающей в результате интегрирования однопетлевых вкладов тяжелых состояний, обладающих неравными массами $M = \mathrm{diag}(m_1, m_2, ..., m_i)$. В этом специфическом случае полная факториза-

[1)]e-mail: aaosipov@jinr.ru

ция M^2 в тепловом ядре невозможна, поскольку M не коммутирует с остальной частью эллиптического оператора. В результате асимптотический ряд имеет более сложную структуру [15–17]. Математическая сложность данной задачи зачастую обходится путем упрощений, которые, как правило, не имеют под собой серьезной аргументации [13].

В работах [18–20] был предложен альтернативный метод получения эффективного действия в теории с тяжелыми состояниями неравной массы, основанный на перестройке асимптотического ряда по степеням собственного времени. Пересуммирование учитывает различие в массах тяжелых частиц. Метод особенно эффективен, когда мы имеем дело со случаем почти вырожденной матрицы M. Достоинством этого подхода является имеющаяся связь коэффициентов модифицированного разложения со стандартными коэффициентами Сили–ДеВитта [21].

В настоящей работе мы существенно развиваем вышеуказанный метод. А именно, мы отказываемся от процедуры пересуммирования асимптотического ряда, которая основывается на рекурентном (т.е. пошаговом) выделении конечного зависящего от разности квадратов масс вклада. Данная процедура позволяет факторизовать симметричную (отностельно перестановки масс) часть вклада. При этом антисимметричная часть раскладывается в ряд по степеням разности квадратов масс и модифицирует коэффициенты Сили–ДеВитта. Отказ от этой изящной, но вносящей дополнительные приближения идеи, делает связь со стандартными коэффициентами Сили–ДеВитта более сложной. Как мы покажем, новые коэффициенты разложения b_n зависят не только от фоновых полей, но и от масс, причем последняя зависимость имеет неполиномиальный (логарифмический) вид. В пределе равных масс b_n переходят в a_n. Интересной особенностью предлагаемого подхода является возможность связать массовую часть коэффициентов b_n с порождающими их фейнмановскими интегралами. Таким образом, каждый из коэффициентов b_n содержит полную информацию о конечных вкладах связанных с ним однопетлевых диаграмм.

Для определенности здесь мы рассматриваем теорию с $U(3)\times U(3)$ киральной симметрией, явно и спонтанно нарушенной до подгруппы $U(1)$. Известно, что группа $U(3)_L\times U(3)_R$ отвечает симметрии КХД лагранжиана в идеальном мире безмассовых кварков. В реальном мире с ненулевыми затравочными массами токовых кварков, киральная симметрия явно нарушена. При низких энергиях в результате динамического нарушения киральной симметрии возникает щель в спектре фермионов, кварки тяжелеют и приобретают неравные массы, что и позволяет построить эффективный низкоэнергетический мезонный лагранжиан в виде ряда по $1/M^2$. Излагаемый ниже метод может быть положен в основу математически строгого подхода к решению данной задачи в рамках расширенной модели НИЛ.

Материал распределяется следующим образом. Сначала мы формулируем задачу. Затем обсуждаем основную идею расчетов и приводим основные результаты. Многочисленные детали вычислений будут изложены в отдельной подробной публикации.

Логарифм формального определителя самосопряженного эллиптического оператора второго порядка описывает однопетлевые радиационные поправки к классической теории. В дальнейшем нас будет интересовать только действительная часть эффективного действия, являющегося результатом вычисления определителя оператора Дирака D в фоновых скалярном s, псевдоскалярном p, векторном v_μ, и аксиально-векторном a_μ полях. Метод собственного времени не может быть применен непосредственно к фермионам, поскольку оператор Дирака является эллиптическим оператором первого порядка, и его спектр неограничен как сверху, так и снизу. Вместо этого рассмотрим функционал

$$W_E=-\ln|\det D_E|= \\ =\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\,\rho(t,\Lambda^2)\mathrm{Tr}\left(e^{-tD_E^\dagger D_E}\right), \qquad (1)$$

представляющий действительную часть однопетлевого эффективного действия в евклидовом пространстве[2)] в виде интеграла по собственному времени t. Интеграл расходится на нижнем пределе, поэтому вводится регулятор $\rho(t,\Lambda^2)$, где Λ – обрезание. Оператор Дирака имеет вид

$$D_E=i\gamma_\alpha d_\alpha-M+\Sigma, \qquad (2)$$

где $d_\alpha=\partial_\alpha+i\Gamma_\alpha$, $\Gamma_\alpha=v_\alpha+\gamma_{5E}a_\alpha$, $\Sigma=s+i\gamma_{5E}p$, $\alpha=1,2,3,4$, а массовая матрица тяжелых кварков равна $M=\mathrm{diag}(m_1,m_2,m_3)$. Фоновые поля принимают значения в алгебре Ли $U(3)$ группы, например, $s=s_a\lambda_a$, и т.д., $\lambda_a=(\lambda_0,\lambda_i)$, где $\lambda_0=\sqrt{2/3}$ и λ_i – восемь эрмитовых $SU(3)$ матриц Гелл–Манна. Символ Tr обозначает взятие шпура по цветовым, ароматическим, и гамма матрицам, а также интегрирование по координатам. Вся зависимость от фоновых полей в D_E после перехода к эрмитовому оператору

$$D_E^\dagger D_E=M^2-d_\alpha^2+Y \qquad (3)$$

[2)] Все вычисления мы проводим в евклидовом пространстве, на что указывает индекс E. Аналитическое продолжение полученного результата в пространство Минковского хорошо известно, поэтому здесь мы не будем на этом останавливаться.

собирается в Y и ковариантной производной d_α.

Чтобы продвинуться в вычислении выражения (1), мы воспользуемся швингеровской техникой фиктивного гильбертова пространства, изложенной, например, в обзоре [6]. Она позволяет представить эффективное действие в виде интеграла по 4-импульсам k_α

$$W_E = \frac{1}{2}\int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-k^2} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{dt}{t^3}\, \rho(t,\Lambda^2)\, \mathrm{tr}\left(e^{-t(M^2+A)}\right), \qquad (4)$$

где $A = -d_\alpha^2 - 2ik\partial/\sqrt{t} + Y$. Поскольку оператор A содержит производные по координатам, необходимо уточнить смысл операции tr. Действительно, так как пространство $x \in \mathbb{R}^4$ не имеет границ, мы можем интегрировать по частям. Однако эта операция будет однозначной только при условии, что шпур не изменяется при циклической перестановке его x-зависимых элементов. Учитывая наличие производных в A, для гарантированного выполнения данного условия в (4) предполагается полная симметризация шпура, т.е., tr в таких случаях понимается как

$$\mathrm{str}\,(A_1A_2\dots A_n) = \frac{1}{n}\sum_{\text{cycl. perm.}} \mathrm{tr}\,(A_1A_2\dots A_n). \qquad (5)$$

Чтобы выделить лидирующие в разложении по $1/M^2$ вклады, достаточно учесть слагаемые не выше t^4 степени, которые под знаком ароматического шпура (что обозначается индексом f) имеют вид

$$\mathrm{tr}_f\left(e^{-t(M^2+A)}\right) = \sum_{i=1}^{3} c_i(t) - t\sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\mathrm{tr}_f\, A_i + \\ + \frac{t^2}{2!}\sum_{i,j} c_{ij}(t)\,\mathrm{tr}_f\,(A_iA_j) - \frac{t^3}{3!}\sum_{i,j,k} c_{ijk}(t)\,\mathrm{tr}_f\,(A_iA_jA_k) + \\ + \frac{t^4}{4!}\sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}(t)\,\mathrm{tr}_f\,(A_iA_jA_kA_l) + \mathcal{O}(t^5). \qquad (6)$$

Здесь $A_i = E_iA$, где 3×3 матрицы $(E_i)_{nm} = \delta_{in}\delta_{im}$, а коэффициенты $c_{i_1i_2\dots i_n}(t)$ полностью симметричны относительно перестановки индексов и хорошо известны [19]. Они зависят от масс и собственного времени. Если массы вырождены, то все они совпадают, т.е., $c_i(t) = c_{ii}(t) = c_{iii}(t) = c_{iiii}(t) = e^{-tm_i^2}$.

Подставляя это разложение в (4) и интегрируя по импульсам и собственному времени, приходим к выражению

$$W_E = \frac{N_c}{32\pi^2}\int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{tr}_{Lf}\, b_n(x,x), \qquad (7)$$

где $N_c = 3$, а tr_{Lf} означает взятие шпура по γ и λ_i-матрицам. Коэффициенты $b_n(x,x)$ зависят от фоновых полей и кварковых масс, т.е., содержат информацию, как о мезонных вершинах, так и о соответствующих им константах связи. В случае равных масс зависимость от m факторизуется в виде интегралов $J_{n-1}(m^2)$ [19], а мезонные вершины собираются в коэффициенты Сили–ДеВитта, точнее в их предельное значение для совпадающих аргументов $a_n(x,x)$. При больших m коэффициенты $b_n(x,x)$ демонстрируют такое же асимптотическое поведение, как и $J_{n-1}(m^2)$, т.е., $b_n \sim m^{-2(n-2)}$.

Здесь мы рассмотрим только лидирующие коэффициенты, а именно, b_1 и b_2. Случай $n = 0$ не представляет интереса, поскольку b_0 не содержит фоновых полей и опускается из эффективного действия. Коэффициенты с $n \geqslant 3$ стремятся к нулю в пределе бесконечных масс, что и объясняет сделанное приближение.

Для удобства записи результата, наряду с обычным умножением матриц, мы будем также использовать нестандартное произведение [22], часто называемое адамаровским, которое определяется почленным умножением соответствующих элементов матриц

$$(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij} \qquad (8)$$

без суммирования по повторяющимся индексам. Это произведение, в отличие от стандартного, коммутативно, но сохраняет свойства ассоциативности и дистрибутивности.

Теперь мы можем записать результат для коэффициента b_1 в виде

$$b_1 = -J_0 \circ Y, \qquad (9)$$

где $(J_0)_{ij} = \delta_{ij}J_0(m_i^2)$ - диагональная матрица, а интеграл

$$J_0(m_i^2) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\,\rho(t,\Lambda^2)\,c_i(t). \qquad (10)$$

Эта формула описывает вклад фейнмановской однопетлевой диаграммы, известной как “головастик”. Регуляризация выбирается в соответствии с рассматриваемой задачей, для модели НИЛ это $\rho(t,\Lambda^2) = 1 - (1+t\Lambda^2)e^{-t\Lambda^2}$.

Перейдем к рассмотрению второго коэффициента b_2. Результат представим в виде

$$b_2 = \frac{1}{2}\,Y\,(J\circ Y) - \frac{1}{12}\Gamma^{\alpha\beta}\left(J\circ\Gamma^{\alpha\beta}\right) + \Delta b_2, \qquad (11)$$

где антисимметричный тензор $\Gamma_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + i[\Gamma_\alpha,\Gamma_\beta]$, а $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma_\beta - \partial_\beta\Gamma_\alpha$. $J_{ij} = J(m_i,m_j)$ – симметричная

3×3 матрица, элементами которой являются логарифмически расходящиеся части (при $\Lambda\to\infty$) фейнмановских собственно-энергетических диаграмм с массами виртуальных частиц m_i и m_j. Поскольку нам также потребуются выражения для аналогичных вкладов треугольных J_{ijk} и четырехугольных J_{iijk} диаграмм, представим их все сразу

$$(J_{ij}, J_{ijk}, J_{iijk}) = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\,\rho(t,\Lambda^2)\;(c_{ij}(t), c_{ijk}(t), c_{iijk}(t))\,. \tag{12}$$

В рассматриваемой теории имеется всего три аромата кварков, поэтому в J_{iijk} как минимум два индекса совпадают. Подчеркнем, что формула (11) является основным результатом данной работы.

В пределе равных масс, первые два члена в (11) переходят в хорошо известный результат [6], а третье слагаемое обращается в ноль, т.е., оно представляет только вклады, связанные с явным нарушением киральной симметрии. Без учета этого члена описание явного нарушения ароматической симметрии представляется неполным. Мы запишем его в виде четырех слагаемых

$$\Delta b_2 = \Omega_Y + \sum_{n=0}^{2}\Omega^{(n)}, \tag{13}$$

где выделен вклад линейных по Y членов Ω_Y, а вклад векторных частиц разбит на три группы $n = 0,1,2$ по числу имеющихся производных.

Линейная по Y часть состоит из двух слагаемых

$$\Omega_Y = AY + \frac{i}{3}(R\circ\Gamma^\alpha)\overset{\leftrightarrow}{\partial^\alpha} Y, \tag{14}$$

где R и A являются 3×3 матрицами с элементами

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\left(J_{iij} - J_{jji}\right), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \sum_{j\neq i}\left(J_{ii} - J_{ij} + R_{ij}\right)\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^\alpha_{ji},\\ A_{ij} &= (J_{ij} - J_{ijk})\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\alpha_{kj} -\\ &- R_{ij}\left(\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^\alpha_{jj} - \Gamma^\alpha_{ii}\Gamma^\alpha_{ij}\right)_{|i\neq j\neq k}, \end{aligned} \tag{16}$$

а двусторонняя производная определена как разность $Y\overset{\leftrightarrow}{\partial^\alpha}\Gamma^\alpha \equiv Y\partial^\alpha\Gamma^\alpha - (\partial^\alpha Y)\Gamma^\alpha$. Чтобы не было недоразумений, подчеркнем, что повторяющиеся индексы аромата не предполагают суммирования по ним. Здесь и далее суммирование проводится, только если явно выписан знак суммы.

Рассмотрим теперь члены с двумя производными

$$\Omega^{(2)} = \frac{1}{24}\left[F^{\alpha\beta}\left(T\circ F^{\alpha\beta}\right) + 6(\partial\Gamma)\left(T\circ\partial\Gamma\right)\right]. \tag{17}$$

Первое слагаемое дает дополнительный вклад в уже известные нам кинетические члены эффективного лагранжиана. Симметричная матрица T имеет вид $T_{ij} = J_{ij} - J_{iijj}$. В выражении $\partial\Gamma$ подразумевается суммирование по опущенным индексам $\partial^\alpha\Gamma^\alpha$. Ввиду поперечности векторных полей, второе слагаемое в (17) обращается в нуль на массовой поверхности этих состояний. Поэтому его можно опустить.

Члены с одной производной можно собрать в следующее выражение

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \frac{i}{3}C^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{i}{6}\,\delta_{\alpha\beta\gamma\sigma}(K\circ\partial^\alpha\Gamma^\beta)E^{\gamma\sigma} + \\ &+ \frac{3i}{4}\left(T\circ\partial^\alpha\Gamma^\beta\right)L_-^{\beta\alpha}\,, \end{aligned} \tag{18}$$

которое представляет эффективные трехчастичные вершины, описывающие локальное взаимодействие векторных и аксиально-векторных полей. Символ $\delta_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\sigma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}$ является полностью симметричным тензором, составленным из произведения двух символов Кронекера. Диагональные и недиагональные элементы матрицы $C^{\alpha\beta}$ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta}_{ii} &= \sum_{j\neq i}\left(J_{ii} - J_{ij} + \frac{1}{4}\,R_{ij} + \frac{3}{4}T_{ij}\right)\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^\beta_{ji}\,,\\ C^{\alpha\beta}_{ij} &= (J_{ij} - J_{123})\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\beta_{kj}|_{i\neq j\neq k} + \frac{1}{4}R_{ij}\left(L_+^{\alpha\beta}\right)_{ij} + \\ &+ \frac{3}{4}T_{ij}\left(L_-^{\alpha\beta}\right)_{ij}\,, \end{aligned} \tag{19}$$

где мы положили

$$\left(L_\pm^{\alpha\beta}\right)_{ij} = \left(\Gamma^\alpha_{ii} \pm \Gamma^\alpha_{jj}\right)\Gamma^\beta_{ij}. \tag{20}$$

Обратим внимание на то, что элементы матрицы Γ^α_{ij} перестановочны между собой, поскольку, входящие в них единичная и γ_5 матрицы коммутативны. Антисимметричная матрица K определяется выражением

$$K_{ij} = (J_{jjik} - J_{iijk})_{|i\neq j\neq k}\,. \tag{21}$$

Тензор $E^{\gamma\sigma}$ также не имеет диагональных элементов, хотя и не является антисимметричным

$$E^{\gamma\sigma}_{ii} = 0, \quad E^{\gamma\sigma}_{ij} = \Gamma^\gamma_{ik}\Gamma^\sigma_{kj},\ (i\neq j\neq k). \tag{22}$$

Последнее, что нам осталось рассмотреть, – это вклад членов без производных, т.е. членов $\propto\Gamma^4$. Поскольку таких слагаемых много (78 независимых комбинаций из Γ), удобно не собирать их в матричную форму, а представить результат в виде явных сумм по ароматическим индексам. Тогда мы имеем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}_f\Omega^{(0)} = \sum_{i<j}\Big\{ &(\Gamma_{ij}\Gamma_{ji})^2\left[\frac{2}{3}(J_{ii}+J_{jj}) - \frac{4}{3}J_{ij}\right] + \\
&+ (\Gamma_{ij}\Gamma_{ij})(\Gamma_{ji}\Gamma_{ji})\,\frac{1}{6}(2J_{ij}-J_{ii}-J_{jj})\Big\} + \sum_{\substack{i\neq j\neq k,\\ j<k}} \\
\Big\{ &(\Gamma_{ij}\Gamma_{ji})(\Gamma_{ik}\Gamma_{ki})\left[\frac{1}{3}(J_{jk}+2J_{iijk}) + J_{ii} - J_{ij} - J_{ik}\right] \\
&+ (\Gamma_{ji}\Gamma_{ik})(\Gamma_{ki}\Gamma_{ij})\left[\frac{1}{3}(J_{ii}+2J_{iijk}) + J_{jk} - 2J_{ijk}\right] + \\
&+ [(\Gamma_{ii}\Gamma_{jk})(\Gamma_{ij}\Gamma_{ki}) + (\Gamma_{ik}\Gamma_{ji})(\Gamma_{kj}\Gamma_{ii})] \times \\
&\times \frac{1}{3}(2J_{iijk} - J_{ij} - J_{ik}) + \\
&+ (\Gamma_{ij}\Gamma_{ik})(\Gamma_{ki}\Gamma_{ji})\,\frac{1}{3}(2J_{iijk} - J_{ii} - J_{jk})\Big\} + \\
&+ \sum_{i\neq j\neq k}\Big\{[(\Gamma_{ii}\Gamma_{ij})(\Gamma_{jk}\Gamma_{ki}) + (\Gamma_{ik}\Gamma_{kj})(\Gamma_{ji}\Gamma_{ii})] \times \\
&\times \frac{1}{3}(J_{ik} + 2J_{iijk} - J_{ijk}) + \\
&+ \left[\left(L_-^{\alpha\alpha}\right)_{ij}(\Gamma_{jk}\Gamma_{ki}) + (\Gamma_{ij}\Gamma_{ji})(\Gamma_{ik}\Gamma_{ki})\right] R_{ij}\Big\} + \\
&+ \sum_{i\neq j}\left(\Gamma^\alpha_{ii}\Gamma^\beta_{ii}\Gamma^\gamma_{ij}\Gamma^\sigma_{ji} - \Gamma^\alpha_{ii}\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_{jj}\Gamma^\sigma_{ji} - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^\beta_{ji}\Gamma^\gamma_{ij}\Gamma^\sigma_{ji}\right) \times \\
&\times \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta\gamma\sigma}T_{ij}\,. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Здесь выражение в круглых скобках понимается как $(\Gamma_{ij}\Gamma_{ji}) \equiv \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^\alpha_{ji}$. В пределе равных масс фермионов (23) равно нулю, так как все J-зависимые коэффициенты в этом случае обращаются в нуль.

В заключение отметим, что полученные нами выражения для коэффициентов $b_1(x,x)$ и $b_2(x,x)$ могут быть положены в основу построения целого ряда эффективных теорий, возникающих в результате исключения тяжелых состояний неравной массы. Наиболее прямым приложением было бы их использование для анализа явного нарушения $SU(3)$ и $SU(2)$ симмметрий в моделях НИЛ. Как мы уже отмечали, многочисленные имеющиеся в литературе исследования этих вопросов неполны, поскольку коэффициент b_2 содержит множество ранее не рассматриваемых вершин. Хотя мы здесь ограничились частным примером, предлагаемый подход легко распространяется на случай произвольной группы внутренней симметрии. Это является прямым следствием общности метода Фока–Швингера, лежащего в основе наших вычислений.

1. V. A. Fock, Izv. Akad. Nauk. USSR (Phys.) **4–5**, 551 (1937).
2. V. A. Fock, Phys. Zs. Sowjet. **12**, 404 (1937).
3. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
4. B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon & Breach, N.Y. (1965).
5. B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).
6. R. D. Ball, Phys. Rep. **182**, 1 (1989).
7. D. V. Vassilevich, Phys. Rep. **388**, 279 (2003).
8. P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, 2nd ed., CRC Press LLC, Boca Raton, FL (1995).
9. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
10. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
11. M. K. Volkov, Ann. of Phys. **157**, 282 (1984).
12. A. Dhar, R. Shankar, and S. R. Wadia, Phys. Rev. D **31**, 3256 (1985).
13. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
14. G. Passarino, arxiv: 1901.04177.
15. C. Lee, H. Min, and P. Y. Pac, Nucl. Phys. B **202**, 336 (1982).
16. C. Lee, T. Lee, and H. Min, Phys. Rev. D **39**, 1681 (1989).
17. C. Lee, T. Lee, and H. Min, Phys. Rev. D **39**, 1701 (1989).
18. A. A. Osipov and B. Hiller, Phys. Rev. D **63**, 094009 (2001); arxiv: hep-ph/0012294.
19. A. A. Osipov and B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 087701 (2001); arxiv: hep-th/0106226.
20. A. A. Osipov and B. Hiller, Phys. Lett. B **515**, 458 (2001).
21. L. L. Salcedo, EPJ direct **3**, 1 (2001); https://doi.org/10.1007/s1010501c0014.
22. G. P. H. Styan, Linear Algebra Its Appl. **6**, 217 (1973).