Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 6, с. 406 – 409

О нелокальном преобразовании Дарбу для стационарных аксиально-симметричных уравнений Шредингера и Гельмгольца

А. Г. Кудрявцев[1)]

Институт прикладной механики РАН, 125040 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 января 2021 г.
После переработки 27 января 2021 г.
Принята к публикации 17 февраля 2021 г.

Рассматривается нелокальное преобразование Дарбу для стационарных аксиально-симметричных уравнений Шредингера и Гельмгольца. На основе формул нелокального преобразования Дарбу и обобщенного преобразования Мутара получены новые примеры двумерных потенциалов и точных решений для стационарных аксиально-симметричных уравнений Шредингера и Гельмгольца.

DOI: 10.31857/S1234567821060082

В работе [1] на основе обобщенного преобразования Мутара получены примеры двумерных потенциалов и точных решений стационарного уравнения Шредингера в случае аксиальной симметрии. В работе [2] показано, что обобщенное преобразование Мутара является частным случаем двумерного нелокального преобразования Дарбу. Целью настоящей работы является получение новых примеров двумерных потенциалов и точных решений для стационарных аксиально-симметричных уравнений Шредингера и Гельмгольца на основе применения нелокального преобразования Дарбу.

Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера в виде $(\Delta - u\,(x,y,z))\,Y\,(x,y,z) = 0$. В случае $u = -E + V\,(x,y,z)$ это уравнение описывает нерелятивистскую квантовую систему с энергией E [3]. В случае $u = -\omega^2/c\,(x,y,z)^2$ уравнение описывает распространение акустических волн, имеющих частоту ω, в неоднородной среде со скоростью звука c и под именем уравнения Гельмгольца используется в теории волн [4]. Случай фиксированной частоты ω интересен при моделировании в акустической томографии [5]. Случай фиксированной энергии E для двумерного уравнения представляет интерес в теории интегрируемых нелинейных систем [6].

При аксиальной симметрии стационарное уравнение Шредингера в цилиндрических координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - u\,(r,z)\right) Y\,(r,z) = 0. \qquad (1)$$

Это линейное дифференциальное уравнение с непостоянным коэффициентом u. Для анализа таких уравнений оказались полезны преобразования Дарбу. Авторы книги [7] отмечают, что важность преобразования Дарбу заключается в возможности получения новых решаемых уравнений из исходного решаемого уравнения. Изменение решения исходного уравнения в формуле преобразования Дарбу дает решения нового уравнения. Если набор выбранных специальных функций позволяет представлять аналитически все решения исходного уравнения, можно сказать, что исходное уравнение точно разрешимо. Если исходное уравнение разрешимо, можно получить все решения нового уравнения с использованием преобразования Дарбу. Преобразование Дарбу может быть повторно применено к новым уравнениям. Таким образом, можно сказать, что уравнение решаемое, если оно может быть получено из другого решаемого уравнения конечным числом преобразований Дарбу. Например, если исходным уравнением является стационарное уравнение Шредингера в одномерной квантовой механике, естественно называть решаемыми уравнения, описывающие свободное движение частиц, гармонический осциллятор, кулоновский потенциал и потенциалы Морса. В этой статье мы говорим, что стационарные уравнения Шредингера и Гельмгольца в двумерном случае решаемые, если они могут быть полученны из уравнения с постоянным (в том числе нулевым) потенциалом с помощью конечного числа преобразований Дарбу.

Приложения классического преобразования Дарбу для одномерного уравнения Шредингера можно найти в книге [7]. Обзор классического преобразования Мутара для двумерного уравнения Шредингера в декартовых координатах и связь преобразования Мутара с преобразованием Дарбу приведены в работе [8]. Были исследованы различные обобщения

[1)]e-mail: kudryavtsev_a_g@mail.ru

классических преобразований Дарбу и их приложения к двумерным системам (см. обзор [9], недавнюю публикацию [10] и ссылки в них). В статьях [11, 12] в преобразование Дарбу была включена нелокальная переменная. Было получено нелокальное преобразование Дарбу двумерного стационарного уравнения Шредингера в декартовых координатах и установлена его связь с преобразованием Мутара. Основная идея этих работ была вдохновлена подходом к нелокальным симметриям в анализе групп симметрий дифференциальных уравнений [13, 14] (для варианта, основанного на теории накрытий, см. книгу [15] и ссылки в ней). В данной статье рассматривается нелокальное преобразование Дарбу для стационарного уравнения в цилиндрических координатах (1), используя подход статей [11, 12].

Используется связь уравнения Шредингера с уравнением Фоккера–Планка [16]. Подстановка

$$Y(r,z) = P(r,z)\,e^{h(r,z)} \tag{2}$$

в уравнение (1) приводит к уравнению типа Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P_r + 2h_rP + \frac{1}{r}P\right) + \frac{\partial}{\partial z}(P_z + 2h_zP) = 0, \tag{3}$$

если u и h удовлетворяют условию

$$u = -h_{rr} + {h_r}^2 + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2} - h_{zz} + {h_z}^2. \tag{4}$$

Уравнение (3) имеет вид закона сохранения, что позволяет получить следующую систему уравнений:

$$P_r + 2h_rP + \frac{1}{r}P - Q_z = 0, \tag{5}$$

$$P_z + 2h_zP + Q_r = 0. \tag{6}$$

Переменная Q является нелокальной переменной относительно уравнения (3) и связанного с ним уравнения (1). Преобразование Дарбу уравнений (5), (6), включающее Q, приводит к нелокальному преобразованию уравнения (1).

Рассматривается линейный оператор, соответствующий системе уравнений (5), (6)

$$\hat{L}(h(r,z))\,\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2h_r + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ 2h_z + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Преобразование Дарбу ищется в виде

$$\hat{L}_D\mathbf{f} = \\ = \begin{pmatrix} g_{11} - a_{11}\frac{\partial}{\partial r} - b_{11}\frac{\partial}{\partial z} & g_{12} - a_{12}\frac{\partial}{\partial r} - b_{12}\frac{\partial}{\partial z} \\ g_{21} - a_{21}\frac{\partial}{\partial r} - b_{21}\frac{\partial}{\partial z} & g_{22} - a_{22}\frac{\partial}{\partial r} - b_{22}\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Если линейные операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}_D$ удовлетворяют сплетающему соотношению

$$\left(\hat{L}(h(r,z) + s(r,z))\,\hat{L}_D - \hat{L}_D\hat{L}(h(r,z))\right)\mathbf{f} = 0 \tag{7}$$

для любой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{F} \supset Ker\left(\hat{L}(h)\right)$, где $Ker\left(\hat{L}(h)\right) = \{\mathbf{f} : \hat{L}(h)\,\mathbf{f} = 0\}$, то для любой функции $\mathbf{f_s} \in Ker\left(\hat{L}(h)\right)$ функция $\tilde{\mathbf{f}}(r,z) = \hat{L}_D\mathbf{f_s}(r,z)$ является решением уравнения $\hat{L}\left(\tilde{h}\right)\tilde{\mathbf{f}} = 0$ с новым потенциалом $\tilde{h} = h + s$.

Уравнения для $s, g_{ij}, a_{ij}, b_{ij}$ получаются из сплетающих соотношений (7). При этом возникает следующее выражение:

$$V(r,z) = s(r,z) + 2h(r,z) + \ln(r). \tag{8}$$

Случай $V(r,z) = 0$ приводит к обобщенному преобразованию Мутара, как важному частному случаю нелокального преобразования Дарбу [2]. Приложения обобщенного преобразования Мутара рассмотрены в работе [1].

В общем случае, когда V не обращается в нуль, сплетающие соотношения (7) приводят к следующему виду оператора преобразования Дарбу:

$$\hat{L}_D = e^{-s(r,z)}\begin{pmatrix} R_1 + \frac{\partial}{\partial z} & R_2 \\ s_r - R_2 & s_z + R_1 + \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(V_z - 2s_z + (V_zH + V_rT)/G\right),$$
$$R_2 = \frac{1}{2}\left(s_r + (s_rH - s_zT)/G\right),$$
$$G = s_rV_r + s_zV_z, H = V_{zz} - s_{rr}, T = V_{rz} + s_{rz}$$

и s удовлетворяет системе двух нелинейных уравнений в частных производных [2]. Эти уравнения решить в общем виде не получается и они здесь для краткости не приводятся.

В соответствии с (9) имеем

$$\tilde{P} = \mathrm{e}^{-s}\left(R_1P + \frac{\partial}{\partial z}P + R_2Q\right),$$

и, учитывая соотношение $\tilde{Y}(r,z) = \tilde{P}(r,z)\,e^{\tilde{h}(r,z)}$, получаем формулу нелокального преобразования Дарбу

$$\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial z}Y + (R_1 - h_z)\,Y + \mathrm{e}^hR_2Q. \tag{10}$$

Используя соотношение (2), уравнения (5), (6) для Q принимают вид

$$\mathrm{e}^{-h}\left(Y_r + h_rY + \frac{1}{r}Y\right) - Q_z = 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{e}^{-h}\left(Y_z + h_z Y\right) + Q_r = 0. \quad (12)$$

При выборе конкретного вида h система уравнений на s может заметно упрощаться. Функция h связана с исходным потенциалом u формулой (4). Нетрудно проверить, что $h_u = -\ln\left(rf\left(r,z\right)\right)$, где f является произвольным решением уравнения (1) с исходным потенциалом u, удовлетворяет уравнению (4). Рассмотрим, например, $u=0$, $f = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$. Имеем, соответственно, $h_0 = -\ln\left(r\right) + \frac{1}{2}\ln\left(r^2+z^2\right)$. При $h = h_0$ система уравнений на s имеет частное решение

$$s_0 = -1/2\ln\left(r^2+z^2\right) + \ln\left(\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + C\right) - \\ - \ln\left(\left(1-2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + \left(1+2C_1\right)C\right), \quad (13)$$

где C, C_1 – произвольные константы. По формуле (4) при $\tilde{h} = h_0 + s_0$ получаем новый потенциал

$$\tilde{u}\left(r,z\right) = -8\frac{C{C_1}^2\left(r^2+z^2\right)^{C_1-1}}{\left(\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C\right)^2}. \quad (14)$$

Этот потенциал удовлетворяет условию $\tilde{u} < 0$ и не имеет особенностей при $C > 0, C_1 \geq 1$. Таким образом, мы получили двухпараметрическое семейство решаемых потенциалов Гельмгольца.

В соответствии с (10) мы имеем следующую формулу для решений уравнения (1) с потенциалом (14)

$$\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial z}Y - M\left(zY - \sqrt{r^2+z^2}Q\right), \quad (15)$$

где

$$M = \frac{\left(\left(1+2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + C\left(1-2C_1\right)\right)}{2\left(r^2+z^2\right)\left(\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C\right)}.$$

Функция Q определяется из системы уравнений

$$\left(Y_r + \frac{rY}{r^2+z^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} - Q_z = 0, \quad (16)$$

$$\left(Y_z + \frac{zY}{r^2+z^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} + Q_r = 0, \quad (17)$$

где функция Y – любое решение уравнения (1) с исходным потенциалом $u=0$.

Для примера рассмотрим следующие простые решения уравнения (1): $1, z, r^2-2z^2, 3zr^2-2z^3, \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$. Подставляя эти решения в формулы (15)–(17), получаем соответствующие решения уравнения (1) с потенциалом (14):

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\left(1+2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + \left(1-2C_1\right)C}{\sqrt{r^2+z^2}\left(\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C\right)},$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{\left(1-2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + \left(1+2C_1\right)C}{\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C},$$

$$\tilde{Y}_3 = \frac{z\left(\left(3-2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + \left(3+2C_1\right)C\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C},$$

$$\tilde{Y}_4 = \\ = \frac{\left(r^2-2z^2\right)\left(\left(5-2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + \left(5+2C_1\right)C\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C},$$

$$\tilde{Y}_5 = \frac{z\left(\left(3+2C_1\right)\left(r^2+z^2\right)^{C_1} + \left(3-2C_1\right)C\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}\left(\left(r^2+z^2\right)^{C_1}+C\right)}.$$

В свою очередь потенциал (14) может быть использован в качестве исходного потенциала для новых преобразований. Для двумерного уравнения Шредингера в декартовых координатах в работе [17] было показано, что для получения несингулярных потенциалов эффективным является двукратное применение классического преобразования Мутара. Аналогично, в случае цилиндрических координат для получения несингулярных потенциалов эффективно двукратное обобщенное преобразование Мутара [1], которое имеет вид:

$$\tilde{\tilde{u}} = u - 2\frac{\partial^2\ln\left(F\right)}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2\ln\left(F\right)}{\partial z^2} = \\ = u + 2\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}\right)\left(2r\frac{\partial Y_1}{\partial r} + Y_1\right)F^{-1} - \\ - 2\left(\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right)\left(2r\frac{\partial Y_2}{\partial r} + Y_2\right)F^{-1} + \\ + 2r^2\left(\frac{\partial Y_2}{\partial r}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial r}\right)^2 F^{-2} + \\ + 2r^2\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right)^2 F^{-2}, \quad (18)$$

где F удовлетворяет совместной системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z}F = r\left(\frac{\partial Y_2}{\partial r}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial r}\right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}F = -r\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right), \quad (20)$$

функции Y_1 и Y_2 являются решениями уравнения (1) с исходным потенциалом u.

Чтобы избежать громоздких формул, рассмотрим простой случай $C_1 = 1$. В этом случае исходный потенциал (14) имеет вид

$$u = -\frac{8C}{\left(r^2+z^2+C\right)^2}. \quad (21)$$

Для примера рассмотрим $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}_2$ при $C_1 = 1$ в качестве решений исходного уравнения:

$$Y_1 = \frac{3\left(r^2+z^2\right)-C}{\sqrt{r^2+z^2}\left(r^2+z^2+C\right)},\ Y_2 = \frac{r^2+z^2-3C}{r^2+z^2+C}.$$

Из уравнений (19)–(20) получаем

$$F = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} + K,$$

где K – произвольная константа. Затем по формуле (18) получаем новый решаемый потенциал

$$\tilde{\tilde{u}} = -\frac{8C}{\left(r^2+z^2+C\right)^2} + \\ + \frac{2\left(Kz+\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(z+\sqrt{r^2+z^2}K\right)^2\sqrt{r^2+z^2}}. \qquad (22)$$

Для второго примера в качестве решений исходного уравнения рассмотрим $\tilde{Y}_2$ и $\tilde{Y}_3$ при $C_1 = 1$:

$$Y_1 = \frac{r^2+z^2-3C}{r^2+z^2+C}, Y_2 = \frac{z\left(r^2+z^2+5C\right)}{r^2+z^2+C}.$$

Из уравнений (19)–(20) получаем

$$F = \frac{r^4+\left(z^2-15C\right)r^2}{r^2+z^2+C} + K,$$

где K – произвольная константа. По формуле (18) получаем еще один новый решаемый потенциал

$$\tilde{\tilde{u}} = 4N/\left(r^4+\left(z^2+K-15C\right)r^2+K\left(z^2+C\right)\right)^2, \\ N = \left(r^2-K\right)\left(r^2+z^2\right)^2 - \\ - C\left(30z^2+22K-225C\right)r^2 + \\ + KC\left(14z^2-2K+15C\right). \qquad (23)$$

Этот потенциал не имеет сингулярностей при $C > 0$, $K \geq 15\,C$.

Рассмотренные примеры показывают, что, комбинируя нелокальное преобразование Дарбу и обобщенное преобразование Мутара, можно получать новые примеры решаемых потенциалов для стационарных аксиально-симметричных уравнений Шредингера и Гельмгольца. При этом для нелокального преобразования Дарбу нетривиальным шагом является поиск частных решений системы нелинейных уравнений, в то время как обобщенное преобразование Мутара требует лишь выбора точного решения исходного уравнения.

---

1. A. G. Kudryavtsev, JETP Lett. **111**, 126 (2020).
2. A. G. Kudryavtsev, arXiv:2101.10654 (2021).
3. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1977).
4. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, and A. P. Sukhorukov, *The Wave Theory*, Nauka Publishers, Moscow (1990).
5. A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2001).
6. P. G. Grinevich, A. E. Mironov, and S. P. Novikov, Russ. Math. Surv. **65**, 580 (2010).
7. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin (1991).
8. C. Athorne and J. J. C. Nimmo, Inverse Probl. **7**, 809 (1991).
9. A. A. Andrianov and M. V. Ioffe, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 503001 (2012).
10. M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, EPL **129**, 61001 (2020).
11. A. G. Kudryavtsev, Phys. Lett. A **377**, 2477 (2013).
12. A. G. Kudryavtsev, Theor. Math. Phys. **187**, 455 (2016).
13. I. S. Akhatov, R. K. Gazizov, and N. H. Ibragimov, J. Sov. Math. **55**, 1401 (1991).
14. G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, and S. C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, N.Y. (2010).
15. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics* [in Russian], ed. by A. M. Vinogradov and I. S. Krasil'shchik, Faktorial, Moscow (1997) [English translation: Trans. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1999), v. 182].
16. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer, Berlin (1989).
17. I. A. Taimanov and S. P. Tsarev, Theor. Math. Phys. **157**, 1525 (2008).