Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 12, с. 777 – 783

Распад $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ в модели Намбу–Иона-Лазинио с учетом взаимодействия мезонов в конечном состоянии

М. К. Волков[1], *А. А. Пивоваров*[1]

Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 2021 г.
После переработки 30 апреля 2021 г.
Принята к публикации 9 мая 2021 г.

Распад $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ описан в модели Намбу–Иона-Лазинио с учетом контактного вклада, а также вклада от промежуточного векторного мезона. Взаимодействие мезонов в конечном состоянии учтено посредством рассмотрения расходящихся мезонных петель. Дополнительный параметр ультрафиолетового обрезания в этих петлях фиксируется по экспериментальной ширине рассматриваемого процесса.

DOI: 10.31857/S1234567821120016

1. Введение. В недавнем эксперименте [1] были сделаны оценки для ширин распадов $\tau \to K^- n\pi^0\nu_\tau$ ($n = 0, 1, 2, 3$), причем значение ширины распада $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ несколько отличается от данных, приведенных в Particle Data Group (PDG) [2], а также от данных экспериментальной работы [3]. Интерес к этому процессу обусловлен тем, что он используется при изучении поляризации вакуума, а также тем, что он содержит одновременно странные и нестранные частицы. Кроме того, вычисление этого процесса в рамках модели Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [4–11] с учетом $a_1 - \pi$ и $K_1 - K$ переходов приводит к довольно сильному отклонению от экспериментальных данных, в то время как данная модель позволяет описать большое количество процессов распадов τ лептона в удовлетворительном согласии с экспериментом (см., например, [12–15]). Это может свидетельствовать о необходимости учета дополнительных эффектов. В то же время в нашей недавно опубликованной теоретической работе был удовлетворительно описан похожий процесс $\tau \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ [16] с использованием модели НИЛ, но с небольшим выходом за ее рамки для учета взаимодействия пионов в конечном сотсоянии. Подобный же метод можно применить и к описанию распада $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$. Этому и посвящена настоящая работа.

Взаимодействие в конечном состоянии здесь описывается с помощью треугольных мезонных петель, содержащих каон, пион и векторный мезон. Другие диаграммы дают лишь незначительные поправки. Такие петли содержат квадратичную и логарифмическую расходимость. При этом величина обрезания будет фиксироваться по значению экспериментальной ширины.

Однако следует отметить, что при описании распада $\tau \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ для фиксации возникающего неопределенного параметра ультрафиолетового обрезания расходящейся мезонной петли был использован процесс $e^+e^- \to \pi^-\pi^+$. В случае же распада $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$, рассматриваемого в данной работе, не удалось найти такой дополнительный процесс, используя который можно было бы зафиксировать аналогичный параметр. Однако, мы можем претендовать на описание механизма этого распада. Также в данной работе исследуется влияние учета взаимодействия в конечном состоянии на дифференциальное распределение.

2. Лагранжиан взаимодействия модели НИЛ. В стандартной модели НИЛ кварк-мезонный лагранжиан взаимодействия псевдоскалярных и векторных мезонов, содержащий нужные нам вершины, принимает вид [7]:

$$\Delta L_{\text{int}} = \bar{q}\Big[ig_\pi\gamma^5\lambda_0^\pi\pi^0 + ig_K\gamma^5\lambda_\pm^K K^\pm + \frac{g_\rho}{2}\gamma^\mu\lambda_\pm^\rho\rho_\mu^\pm + \\ + \frac{g_{K^*}}{2}\gamma^\mu\lambda_\pm^K K_\mu^{*\pm} + \frac{g_{K^*}}{2}\gamma^\mu\lambda_0^K K_\mu^{*0} + ig_\pi\gamma^5\lambda_\pm^\pi\pi^\pm\Big]q, \quad (1)$$

где q и $\bar{q}$ – u-, d- и s-кварковые поля с составляющими массами $m_u = m_d = 280$ МэВ, $m_s = 420$ МэВ, π^0, $\pi^\pm$, $K^\pm$, $\rho^\pm$, K^{*0} и $K^{*\pm}$ – псевдоскалярные и векторные мезоны, λ_0^π, $\lambda_\pm^K$, $\lambda_\pm^\rho$, $\lambda_\pm^K$, λ_0^K и $\lambda_\pm^\pi$ – линейные комбинации матриц Гелл-Манна.

Константы связи:

$$g_\pi = \sqrt{\frac{Z_\pi}{4I_{20}}}, \quad g_\rho = \sqrt{\frac{3}{2I_{20}}},$$

[1]e-mail: volkov@theor.jinr.ru; tex_k@mail.ru

$$g_K = \sqrt{\frac{Z_K}{4I_{11}}}, \quad g_{K^*} = \sqrt{\frac{3}{2I_{11}}},$$

где

$$Z_\pi = \left(1 - 6\frac{m_u^2}{M_{a_1}^2}\right)^{-1},$$

$$Z_K = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{(m_u+m_s)^2}{M_{K_{1A}}^2}\right)^{-1},$$

$$M_{K_{1A}}^2 = \left(\frac{\sin^2\alpha}{M_{K_1(1270)}^2} + \frac{\cos^2\alpha}{M_{K_1(1400)}^2}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

Z_π – множитель, соответствующий $\pi - a_1$ переходам, Z_K – множитель, соответствующий $K - K_1$ переходам, $M_{a_1} = 1230$ МэВ, $M_{K_1(1270)} = 1272$ МэВ, $M_{K_1(1400)} = 1403$ МэВ [2] – массы аксиально векторных a_1 и K_1 мезонов. Интегралы, входящие в определения констант связи, принимают следующий вид:

$$I_{nm} = -i\frac{N_c}{(2\pi)^4}\int \frac{\theta(\Lambda^2+k^2)}{(m_u^2-k^2)^n(m_s^2-k^2)^m}\mathrm{d}^4k, \qquad (3)$$

$\Lambda = 1250$ МэВ – параметр обрезания [7]. Этот параметр, применяемый в данной версии модели НИЛ, больше значений, используемых в некоторых других версиях этой модели. Версия Намбу–Иона-Лазинио с таким обрезанием, применяемая в данной работе, позволила описать большое количество прецессов в удовлетворительном согласии с экспериментом.

3. Процесс $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$. Диаграммы процесса $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ в лидирующем по $1/N_c$ приближении изображены на рис. 1, 2.

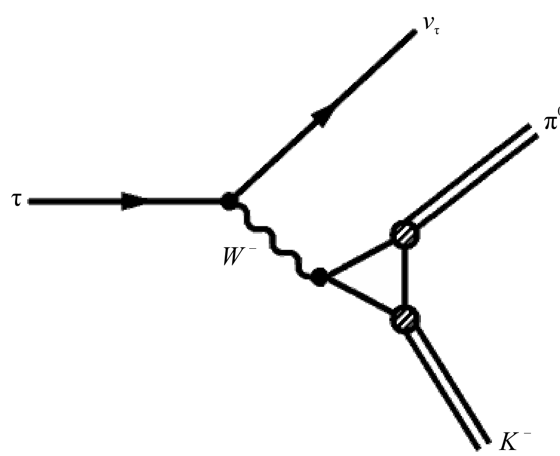

Рис. 1. Контактная диаграмма процесса $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$

Амплитуда этого процесса в данном приближении в модели НИЛ принимает вид:

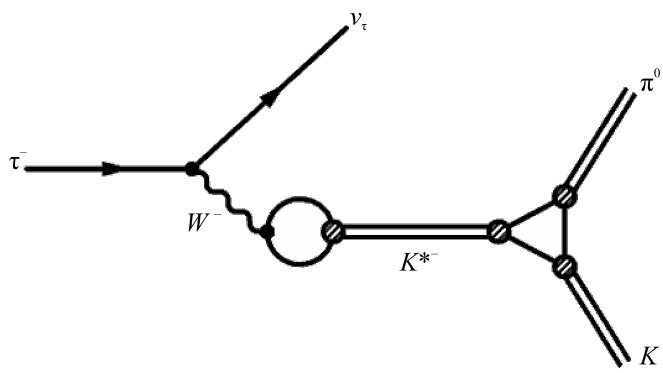

Рис. 2. Диаграмма процесса $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ с промежуточным мезоном

$$M(\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau)_{\mathrm{tree}} = -3G_f V_{us}\frac{g_K g_\pi}{g_{K^*}^2}L_\mu \times$$
$$\times\left[g^{\mu\nu} + \frac{g^{\mu\nu}q^2 f(q^2) - q^\mu q^\nu f(M_{K^*}^2)}{M_{K^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2}\Gamma_{K^*}}\right]\times$$
$$\times\left(A_K p_{K\nu} - A_\pi p_{\pi\nu}\right), \qquad (4)$$

где G_f – константа Ферми, V_{us} – элемент матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава, L_μ – лептонный ток, A_K и A_π – константы, возникающие в результате учета $\pi - a_1$ и $K - K_1$ переходов:

$$A_\pi = 1 - 3\frac{m_u(3m_u - m_s)}{M_{a_1}^2},$$
$$A_K = 1 - 3\frac{m_s(m_u+m_s)}{M_{K_{1A}}^2}. \qquad (5)$$

Функция

$$f(q^2) = 1 - \frac{3}{2}\frac{(m_s - m_u)^2}{q^2} \qquad (6)$$

введена для удобства записи.

С помощью этой амплитуды можно получить следующее значение парциальной ширины данного распада:

$$Br(\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau)_{\mathrm{tree}} = 2.92 \times 10^{-3}. \qquad (7)$$

Экспериментальные значения:

$$Br(\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau)_{\mathrm{exp}} = (5.05 \pm 0.17) \times 10^{-3}\ [1],$$
$$Br(\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau)_{\mathrm{exp}} = (4.33 \pm 0.15) \times 10^{-3}\ [2],$$
$$Br(\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau)_{\mathrm{exp}} = (4.16 \pm 0.21) \times 10^{-3}\ [3]. \qquad (8)$$

Как видно, вычисленное в рамках модели НИЛ значение парациальной ширины для рассматриваемого процесса значительно отличается от экспериментальных данных. Это может говорить о необходимости учета взаимодействия в конечном состоянии.

Для этих целей требуется выход за пределы лидирующего по $1/N_c$ приближения, в котором сформулирована модель НИЛ.

4. Учет взаимодействия в конечном состоянии. Взаимодействие в конечном состоянии можно учесть с помощью диаграмм, изображенных на рис. 3. В отличие от процесса $\tau \to \pi\pi\nu_\tau$, здесь необходимо учесть уже три возможных варианта.

Амплитуда процесса $K^{*-} \to K^-\pi^0$ в лидирующем по $1/N_c$ приближении может быть описана полностью в рамках стандартной модели НИЛ. Она принимает вид:

$$M(K^{*-} \to K^-\pi^0)_{\text{tree}} = = 3\frac{g_K g_\pi}{g_{K^*}} e_\mu(p) \left(A_K p_K^\mu - A_\pi p_\pi^\mu\right), \tag{9}$$

где $e_\mu(p)$ – поляризационный вектор распадающегося мезона, p_K и p_π – импульсы конечных мезонов.

На основе данной амплитуды можно записать соответствующую вершину мезонного лагранжиана:

$$-i3\frac{g_K g_\pi}{g_{K^*}} K_\mu^{*-} \left(A_K \pi^0 \partial^\mu K^+ - A_\pi K^+ \partial^\mu \pi^0\right). \tag{10}$$

Аналогично можно получить остальные вершины [7, 17]:

$$\begin{gathered}
-i3\sqrt{2}\tfrac{g_K g_\pi}{g_{K^*}} K_\mu^{*-} \left(A_K \pi^+ \partial^\mu K^0 - A_\pi K^0 \partial^\mu \pi^+\right), \\
-i3\sqrt{2}\tfrac{g_K g_\pi}{g_{K^*}} \bar{K}_\mu^{*0} \left(A_K \pi^- \partial^\mu K^+ - A_\pi K^+ \partial^\mu \pi^-\right), \\
-i3\tfrac{g_K g_\pi}{g_{K^*}} K_\mu^{*0} \left(A_K \pi^0 \partial^\mu \bar{K}^0 - A_\pi \bar{K}^0 \partial^\mu \pi^0\right), \\
-i\tfrac{\sqrt{2}}{2} g_\rho \rho_\mu^- \left(K^+ \partial^\mu \bar{K}^0 - \bar{K}^0 \partial^\mu K^+\right), \\
-i g_\rho \rho_\mu^+ \left(\pi^- \partial^\mu \bar{\pi}^0 - \bar{\pi}^0 \partial^\mu \pi^-\right).
\end{gathered} \tag{11}$$

Эти мезонные петли приводят к следующим интегралам:

$$F_\mu^{K^{*\pm}} = \int \frac{\left(A_K k - (A_K + A_\pi) p_\pi\right)_\lambda \left(A_\pi k + (A_K + A_\pi) p_K\right)_\nu \left((A_K + A_\pi) k + A_\pi p_K - A_K p_\pi\right)_\mu \left(g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{M_{K^*}^2}\right)}{[k^2 - M_{K^*}^2]\,[(k + p_K)^2 - M_\pi^2]\,[(k - p_\pi)^2 - M_K^2]} \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

$$F_\mu^{\rho} = \int \frac{(k - 2p_\pi)_\lambda (k + 2p_K)_\nu \left((A_K + A_\pi) k + A_K p_K - A_\pi p_\pi\right)_\mu \left(g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{M_\rho^2}\right)}{\left[k^2 - M_\rho^2\right] [(k + p_K)^2 - M_K^2]\,[(k - p_\pi)^2 - M_\pi^2]} \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

$$F_\mu^{K^{*0}} = F_\mu^{K^{*\pm}}. \tag{12}$$

Данные интегралы расходятся и могут быть регуляризованы обрезанием с помощью параметра Λ_M.

Интегралы (12) можно вычислить по аналогии с тем, как вычислялись интегралы по кварковым петлям в модели НИЛ, т.е. разложением знаменателя по внешним импульсам и удержанием только расходящихся членов (см. Приложение).

В результате, мы можем записать дополнительные вклады от мезонных петель в процесс $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$:

$$M(\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau)_{\text{loop}} = -3iG_f V_{us} \frac{g_K g_\pi}{g_{K^*}^2} L_\mu \times \times \left[g^{\mu\nu} + \frac{g^{\mu\nu} q^2 f(q^2) - q^\mu q^\nu f(M_{K^*}^2)}{M_{K^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2}\Gamma_{K^*}}\right] \left\{-\left(3\frac{g_K g_\pi}{g_{K^*}}\right)^2 F_\nu^{K^{*\pm}} + g_\rho^2 F_\nu^\rho + 2\left(3\frac{g_K g_\pi}{g_{K^*}}\right)^2 F_\nu^{K^{*0}}\right\}. \tag{13}$$

Сравнение результата с экспериментальной шириной, взятой из PDG [2], дает значение параметра $\Lambda_M = 950$ МэВ. Если сравнивать с экспериментальным значением, приведенным в работе [1], мы получаем $\Lambda_M = 1100$ МэВ. Эксперимент [3] приводит к $\Lambda_M = 910$ МэВ.

При учете взаимодействия в конечном состоянии аналогичным способом в процессе $\tau \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ был получен параметр обрезания $\Lambda_M = 740$ МэВ [16]. Эти процессы отличаются заменой пиона на более массивный каон. Естественно, что такая замена должна вести к увеличению обрезания. Следовательно, полученный здесь результат не противоречит предыдущему.

График зависимости дифференциальной ширины процесса от инвариантной массы конечных мезонов представлен на рис. 4. Как видно, учет взаимодействия мезонов в конечном состоянии посредством дополнительных мезонных петель не искажает форму данной зависимости.

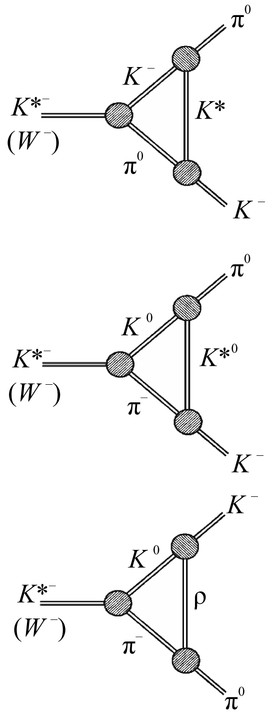

Рис. 3. Дополнительные петлевые вклады вершины $K^{*-}(W^-) \to K^-\pi^0$

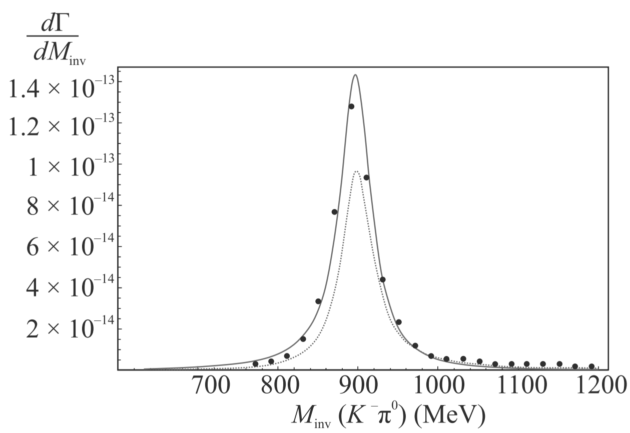

Рис. 4. Зависимости дифференциальной ширины процесса $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ от инвариантной массы конечных мезонов для случая учета взаимодействия в конечном состоянии при $\Lambda_M = 910$ МэВ (сплошная линия) и для случая древесного приближения по мезонным полям (пунктирная линия). Экспериментальные точки взяты из работы [3]

Вершина лагранжиана взаимодействия скалярного мезона K_0^* с каоном и пионом в минимальном порядке не содержит производных:

$$2m_s \frac{g_K g_\pi}{g_{K_0^*}} K_0^{*-} K^+ \pi^0. \tag{14}$$

Поэтому, взаимодействие в конечном состоянии путем обмена скалярным мезоном, изображенное на рис. 5, в минимальном порядке по внешним импульсам приводит к сходящемуся интегралу, который дает результат на несколько порядков меньше экспериментального.

Четырехмезонная вершина взаимодействия каонов и пионов в минимальном порядке также не содержит производных:

$$-\frac{1}{2} g_\pi^2 K^+ K^- \pi^0 \pi^0. \tag{15}$$

Поэтому, если рассмотреть взаимодействие в конечном состоянии посредством четырехмезонной вершины (рис. 6), то мы получаем расходящийся интеграл, который дает результат на два порядка меньше вкладов с обменом векторным мезоном. По этой причине для учета взаимодействия в конечном состоянии мы ограничились только диаграммами, изображенными на рис. 3.

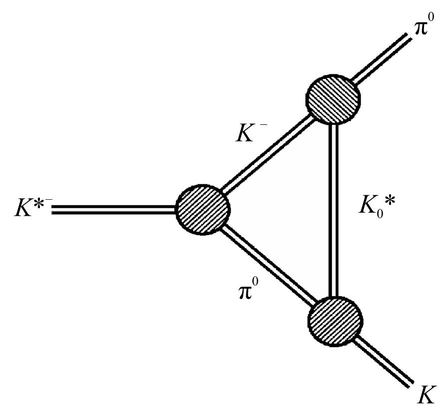

Рис. 5. Взаимодействие в конечном состоянии посредством обмена скалярным мезоном

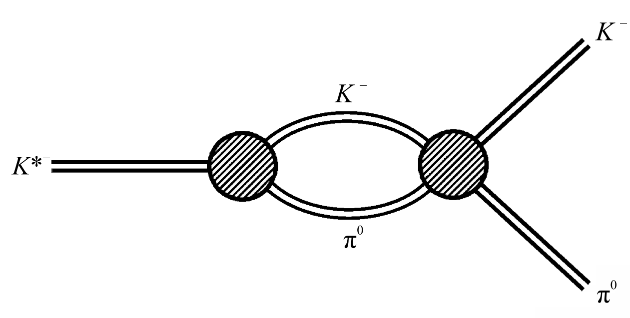

Рис. 6. Взаимодействие в конечном состоянии с четырехмезонной вершиной

5. Заключение. Процесс $\tau \to K^-\pi^0\nu_\tau$ вычислен с использованием модели НИЛ. Взаимодействие адронов в конечном состоянии представлено через обмен векторными мезонами K^* и ρ. Это привело к необходимости выхода за пределы лидирующего по $1/N_c$ приближения, в котором сформулирована стандартная модель НИЛ. Полученные расходящиеся треугольные диаграммы были регуляризованы обрезанием. Так как нет подходящего процесса, по которому можно было бы зафиксировать параметр обрезания в данных трелугольниках, он был определен по экспериментальной ширине рассматриваемого распада. Поэтому полученные результаты не обладают предсказательной силой, но могут претендовать на описание механизма данного процесса. Дополнительные члены составили порядка 30 %, что и позволяет рассматривать их как поправки следующего порядка разложения по $1/N_c$.

Учет треугольных диаграм с обменом скалярными мезонами, а также диаграмм с четырехмезонной вершиной приводит к незначительным поправкам.

Данный распад также изучался во многих теоретических работах других авторов [18–20]. Как правило, при этом использовалась киральная теория возмущений, резонансная киральная теория, дисперсионные соотношения и модель векторной доминантности. Возникающие параметры фиксировались по экспериментальным данным.

Приложение. Интегралы $F_\mu^{K^*}$ и F_μ^{ρ} из (12) вычислялись разложением знаменателей в ряд и удержанием расходящихся членов. Во многих расходящихся слагаемых в числителе возникает квадрат импульса интегрирования. К нему можно прибавить и вычесть квадрат массы мезона $k^2 - M^2 + M^2$. В результате одно слагаемое сокращается с одним из знаменателей пропагатора, и там расходимость остается прежней, а во втором слагаемом расходимость понижается вплоть до появления сходящихся членов. Если отбросить все сходящиеся части, то возникнет неопределенность ответа, зависящая от того, массы каких мезонов мы прибавляли и вычитали. Для избежания этой неопределенности такие сходящиеся слагаемые учитывались при вычислении.

$$
\begin{gathered}
F^{K^*\mu} = -\frac{i}{24M_{K^*}^2}\{2\{3[A_\pi(5A_K^2+2A_KA_\pi+A_\pi^2)p_\pi^\mu - A_K(A_K^2+2A_KA_\pi+5A_\pi^2)p_K^\mu] \\
\times [I_{K^*} - I_{K^*K}(M_K^2+M_\pi^2) + I_{K^*K\pi}M_\pi^4] - 3M_\pi^2[A_K(A_K^2+2A_KA_\pi+5A_\pi^2)p_K^\mu \\
- A_\pi(5A_K^2+2A_KA_\pi+A_\pi^2)p_\pi^\mu][I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}(M_K^2+M_\pi^2) + I_{K^*2K\pi}M_K^4] \\
+ 3M_K^2[I_{K^*K} - 2I_{K^*K\pi}M_\pi^2 + I_{K^*K2\pi}M_\pi^4][A_\pi(5A_K^2+2A_KA_\pi+A_\pi^2)p_\pi^\mu \\
- A_K(A_K^2+2A_KA_\pi+5A_\pi^2)p_K^\mu] + 2[I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}M_\pi^2 + 3I_{K^*K2\pi}M_\pi^4 - I_{K^*K3\pi}M_\pi^6] \\
[p_K^\mu(3A_K^3M_K^2 + A_K^2A_\pi(7M_K^2+M_\pi^2-q^2) + A_KA_\pi^2(11M_K^2+2(M_\pi^2-q^2)) \\
+ A_\pi^3(M_K^2+M_\pi^2-q^2)) - A_\pi^2M_K^2(7A_K^2+2A_KA_\pi+A_\pi^2)p_\pi^\mu] \\
- 6A_KA_\pi(A_K+A_\pi)[I_{K^*} - I_{K^*K}(2M_K^2+M_\pi^2) - I_{K^*K\pi}(M_K^4+M_K^2M_\pi^2+M_\pi^4) \\
- I_{K^*2K\pi}M_K^6]p_\pi^\mu + 6A_KA_\pi(A_K+A_\pi)[I_{K^*} - I_{K^*K}(M_K^2+2M_\pi^2) + 3I_{K^*K\pi}M_\pi^4 - I_{K^*K2\pi}M_\pi^6]p_K^\mu \\
+ 4A_KA_\pi(A_K+A_\pi)[(M_K^2+M_\pi^2-q^2)p_\pi^\mu - M_\pi^2p_K^\mu][I_{K^*K} - 2I_{K^*K\pi}(M_K^2+M_\pi^2) \\
+ I_{K^*K2\pi}(3M_K^4+2M_K^2M_\pi^2+M_\pi^4) - 4I_{K^*2K2\pi}M_K^6 + I_{K^*3K2\pi}M_K^8] + 6A_KA_\pi(A_K+A_\pi) \\
\times (M_\pi^2p_K^\mu - M_K^2p_\pi^\mu)[I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}(M_K^2+2M_\pi^2) + I_{K^*K2\pi}(M_K^4+M_K^2M_\pi^2+M_\pi^4) \\
- 4I_{K^*2K2\pi}M_K^6] + 4A_KA_\pi(A_K+A_\pi)[M_K^2p_\pi^\mu - (M_K^2+M_\pi^2-q^2)p_K^\mu][I_{K^*K} \\
- I_{K^*K\pi}(M_K^2+3M_\pi^2) + I_{K^*K2\pi}(M_K^4+2M_K^2M_\pi^2+3M_\pi^4) - I_{K^*K3\pi}(M_K^2+M_\pi^2)(M_K^4+M_\pi^4) \\
+ I_{K^*2K3\pi}M_K^8] + 12A_KA_\pi(A_K+A_\pi)[-I_{K^*K\pi}M_K^2 + 3I_{K^*2K\pi}M_K^4 - 3I_{K^*3K\pi}M_K^6 \\
+ I_{K^*4K\pi}M_K^8]M_\pi^2p_\pi^\mu + 12A_KA_\pi(A_K+A_\pi)[I_{K^*K\pi}M_\pi^2 - 3I_{K^*K2\pi}M_\pi^4 + 3I_{K^*K3\pi}M_\pi^6 - \\
I_{K^*K4\pi}M_\pi^8]M_K^2p_K^\mu\} - 3[I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}M_\pi^2][8A_KA_\pi M_{K^*}^2(A_\pi p_K^\mu - A_Kp_\pi^\mu) \\
+ 2(A_K+A_\pi)^2M_{K^*}^2(A_Kp_K^\mu - A_\pi p_\pi^\mu) - (A_K+A_\pi)^2(M_K^2+M_\pi^2-q^2)(A_\pi p_K^\mu - A_Kp_\pi^\mu)] \\
+ 2\{(A_K+A_\pi)[I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}(M_K^2+M_\pi^2) + I_{K^*2K\pi}M_K^4][(4A_K^2(M_K^2+M_\pi^2-q^2) \\
+ 2A_KA_\pi(M_K^2+4M_\pi^2-3M_{K^*}^2-q^2) + A_\pi^2(M_K^2+M_\pi^2-q^2))p_\pi^\mu \\
- (A_K^2M_\pi^2 + A_KA_\pi(3M_K^2+5M_\pi^2-3q^2) + 7A_\pi^2M_\pi^2)p_K^\mu] - (A_K+A_\pi)[I_{K^*K}
\end{gathered}
$$

$$- 2I_{K^*K\pi}M_\pi^2 + I_{K^*K2\pi}M_\pi^4\right]\left[\left(A_K^2\left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right) + 2A_KA_\pi\left(4M_K^2 + M_\pi^2 - 3M_{K^*}^2 - q^2\right)\right.\right.$$
$$\left.+ 4A_\pi^2\left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right)\right)p_K^\mu - \left(7A_K^2M_K^2 + A_KA_\pi\left(5M_K^2 + 3M_\pi^2 - 3q^2\right) + A_\pi^2M_K^2\right)p_\pi^\mu\Big]$$
$$+ 2\left[I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}\left(M_K^2 + 2M_\pi^2\right) + I_{K^*K2\pi}\left(M_K^4 + M_K^2M_\pi^2 + M_\pi^4\right) - I_{K^*2K2\pi}M_K^6\right]$$
$$\Big[\left(A_K^3\left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right) + A_KA_\pi\left(A_K + 2A_\pi\right)\left(2M_K^2 + 3M_\pi^2 - 2q^2\right) + A_\pi^3M_\pi^2\right)p_K^\mu$$
$$- \left(A_\pi^3\left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right) + A_KA_\pi\left(2A_K + A_\pi\right)\left(3M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2q^2\right) + A_K^3M_K^2\right)p_\pi^\mu\Big]$$
$$- 2\left[I_{K^*K} - I_{K^*K\pi}\left(2M_K^2 + M_\pi^2\right) + 3I_{K^*2K\pi}M_K^4 - I_{K^*3K\pi}M_K^6\right]\Big[\Big(A_K^3\left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right)$$
$$+ A_K^2A_\pi\left(2M_K^2 + 11M_\pi^2 - 2q^2\right) + A_KA_\pi^2\left(M_K^2 + 7M_\pi^2 - q^2\right) + 3A_\pi^3M_\pi^2\Big)p_\pi^\mu$$
$$- A_K\left(A_K^2 + 2A_KA_\pi + 7A_\pi^2\right)M_\pi^2p_K^\mu\Big]\Big\}\,, \tag{16}$$

$$F^{\rho\mu} = \frac{i}{6M_\rho^2}\left\{6\left(A_K + A_\pi\right)\left[I_{\rho K\pi}M_K^2 - 3I_{\rho 2K\pi}M_K^4 + 3I_{\rho 3K\pi}M_K^6 - I_{\rho 4K\pi}M_K^8\right]M_K^2p_K^\mu\right.$$
$$+ 6\left(A_K + A_\pi\right)\left[-I_{\rho K\pi}M_\pi^2 + 3I_{\rho K2\pi}M_\pi^4 - 3I_{\rho K3\pi}M_\pi^6 + I_{\rho K4\pi}M_\pi^8\right]M_\pi^2p_\pi^\mu$$
$$- 3\left[I_\rho - I_{\rho K\pi}\left(M_K^4 + M_K^2M_\pi^2 + M_\pi^4\right) + I_{\rho 2K\pi}\left(M_K^6 + M_\pi^6\right)\right]\left[\left(3A_K + A_\pi\right)p_K^\mu - \left(A_K + 3A_\pi\right)p_\pi^\mu\right]$$
$$+ 3\left(A_K + A_\pi\right)\left[I_\rho - I_{\rho K}\left(2M_K^2 + M_\pi^2\right) + I_{\rho K\pi}\left(M_K^4 + M_K^2M_\pi^2 + M_\pi^4\right) - I_{\rho 2K\pi}M_K^6\right]p_K^\mu$$
$$- 3\left(A_K + A_\pi\right)\left[I_\rho - I_{\rho K}\left(M_K^2 + 2M_\pi^2\right) + 3I_{\rho K\pi}M_\pi^4 - I_{\rho K2\pi}M_\pi^6\right]p_\pi^\mu$$
$$- 3\left(A_K + A_\pi\right)\left[I_{\rho K} - I_{\rho K\pi}\left(M_K^2 + 2M_\pi^2\right) + I_{\rho K2\pi}\left(M_K^4 + M_K^2M_\pi^2 + M_\pi^4\right) - I_{\rho 2K2\pi}M_K^6\right]$$
$$\times\left[M_K^2p_\pi^\mu - M_\pi^2p_K^\mu\right] + 2\left(A_K + A_\pi\right)\Big[I_{\rho K} - 2I_{\rho K\pi}\left(M_K^2 + M_\pi^2\right) + I_{\rho K2\pi}\left(3M_K^4 + 2M_K^2M_\pi^2 + M_\pi^4\right)$$
$$- 4I_{\rho 2K2\pi}M_K^6 + I_{\rho 3K2\pi}M_K^8\Big]\left[M_K^2p_\pi^\mu - \left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right)p_K^\mu\right] - 2\left(A_K + A_\pi\right)\Big[I_{\rho K}$$
$$- I_{\rho K\pi}\left(M_K^2 + 3M_\pi^2\right) + I_{\rho K2\pi}\left(M_K^4 + 2M_K^2M_\pi^2 + 3M_\pi^4\right) - 4I_{\rho K3\pi}\left(M_K^2 + M_\pi^2\right)\left(M_K^4 + M_\pi^4\right)$$
$$+ I_{\rho 2K3\pi}M_K^8\Big]\left[M_\pi^2p_K^\mu - \left(M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right)p_\pi^\mu\right] + 2\Big[I_{\rho K} - I_{\rho K\pi}\left(2M_K^2 + M_\pi^2\right) + 3I_{\rho 2K\pi}M_K^4$$
$$- I_{\rho 3K\pi}M_K^6\Big]\left[\left(\left(7A_K + 4A_\pi\right)M_K^2 + \left(A_K + A_\pi\right)M_\pi^2 - \left(A_K + A_\pi\right)q^2\right)p_K^\mu - \left(A_K + 4A_\pi\right)M_K^2p_\pi^\mu\right]$$
$$- 2\left[I_{\rho K} - 3I_{\rho K\pi}M_\pi^2 + I_{\rho K2\pi}M_\pi^4 - I_{\rho K3\pi}M_\pi^6\right]\Big[\Big(\left(4A_K + 7A_\pi\right)M_\pi^2 + \left(A_K + A_\pi\right)M_K^2$$
$$- \left(A_K + A_\pi\right)q^2\Big)p_\pi^\mu - \left(4A_K + A_\pi\right)M_\pi^2p_K^\mu\Big] - \left[I_{\rho K} - I_{\rho K\pi}\left(M_K^2 + M_\pi^2\right) + I_{\rho 2K\pi}M_K^4\right]$$
$$\times\Big[\Big(A_K\left(11M_K^2 + 5M_\pi^2 - 3M_\rho^2 - 5q^2\right) + A_\pi\left(2M_K^2 + 2M_\pi^2 - 3M_\rho^2 - 2q^2\right)\Big)p_K^\mu$$
$$- \left(2A_KM_K^2 + A_\pi\left(11M_K^2 + 3M_\pi^2 - 3q^2\right)\right)p_\pi^\mu\Big] + \Big[I_{\rho K} - I_{\rho K\pi}\left(M_K^2 + 2M_\pi^2\right)$$
$$+ I_{\rho K2\pi}\left(M_K^4 + M_K^2M_\pi^2 + M_\pi^4\right) - I_{\rho 2K2\pi}M_K^6\Big]\Big[\Big(A_K\left(5M_K^2 + 7M_\pi^2 - 5q^2\right)$$
$$+ 2A_\pi\left(M_K^2 + 2M_\pi^2 - q^2\right)\Big)p_K^\mu - \left(A_\pi\left(7M_K^2 + 5M_\pi^2 - 5q^2\right) + 2A_K\left(2M_K^2 + M_\pi^2 - q^2\right)\right)p_\pi^\mu\Big]$$
$$+ \left[I_{\rho K} - I_{\rho K\pi}M_\pi^2\right]\Big[\left(A_K\left(M_K^2 + M_\pi^2 - 3M_\rho^2 - q^2\right) - A_\pi M_\rho^2\right)p_K^\mu - \Big(A_\pi\left(M_K^2 + M_\pi^2 - 3M_\rho^2 - q^2\right)$$
$$- A_KM_\rho^2\Big)p_\pi^\mu\Big] - \left[I_{\rho K} - 2I_{\rho K\pi}M_\pi^2 + I_{\rho K2\pi}M_\pi^4\right]\Big[\left(2A_\pi M_\pi^2 + A_K\left(3M_K^2 + 11M_\pi^2 - 3q^2\right)\right)p_K^\mu$$
$$\left.- \left(A_K\left(2M_K^2 + 2M_\pi^2 - 3M_\rho^2 - 2q^2\right) + A_\pi\left(5M_K^2 + 11M_\pi^2 - 3M_\rho^2 - 5q^2\right)\right)p_\pi^\mu\Big]\right\}, \tag{17}$$

где

$$I_{K^*n_1Kn_2\pi} = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(M_{K^*}^2 - k^2\right)\left(M_K^2 - k^2\right)^{n_1}\left(M_\pi^2 - k^2\right)^{n_2}},$$
$$I_{\rho n_1Kn_2\pi} = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(M_\rho^2 - k^2\right)\left(M_K^2 - k^2\right)^{n_1}\left(M_\pi^2 - k^2\right)^{n_2}}. \tag{18}$$

Сходящихся слагаемых в полученных выражениях большинство. Если их отбросить, то ответ изменится всего приблизительно на 5 %. Это дает основания полагать, что конечные части вносят небольшой вклад. Настоящая работа выполнена в данном предположении. Полное вычисление всех конечных частей и уточнение полученных результатов может рассматриваться как отдельная задача для будущих работ.

Авторы выражают благодарность А. Б. Арбузову за интерес к данной работе и полезные обсуждения.

1. A. Lusiani (BaBar), PoS EPS-HEP2019, 216 (2020); doi 10.22323/1.364.0216.
2. P. A. Zyla, R. M. Barnett, J. Beringer et al. (Particle Data Group), PTEP **2020**(8), 083C01 (2020).
3. B. Aubert, M. Bona, D. Boutigny et al. (BaBar), Phys. Rev. D **76**, 051104 (2007).
4. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
5. T. Eguchi, Phys. Rev. D **14**, 2755 (1976).
6. D. Ebert and M. K. Volkov, Z. Phys. C **16**, 205 (1983).
7. M. K. Volkov, Sov. J. Part. Nucl. **17**, 186 (1986) [Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra **17**, 433 (1986)].
8. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
9. U. Vogl and W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
10. D. Ebert, H. Reinhardt, and M. K. Volkov, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 1 (1994).
11. M. K. Volkov and A. E. Radzhabov, Phys. Usp. **49**, 551 (2006).
12. M. K. Volkov, A. B. Arbuzov, and D. G. Kostunin, Phys. Rev. D **86**, 057301 (2012).
13. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Eur. Phys. J. A **55**(9), 165 (2019).
14. M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **110**(4), 237 (2019).
15. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Nucl. Phys. A **1000**, 121810 (2020).
16. M. K. Volkov, A. B. Arbuzov, and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **112**(8), 457 (2020).
17. D. Ebert and M. K. Volkov, Fortsch. Phys. **29**, 35 (1981).
18. M. Finkemeier and E. Mirkes, Z. Phys. C **72**, 619 (1996).
19. M. Jamin, A. Pich, and J. Portoles, Phys. Lett. B **640**, 176 (2006).
20. D. R. Boito, R. Escribano, and M. Jamin, Eur. Phys. J. C **59**, 821 (2009).