Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 11, с. 757 – 763 © 2021 г. 10 июня

Связь Вирасоро и суперинтегрируемости. Гауссова матричная модель

А. Миронов[a,b,c1)], В. Мишняков[d,a,b1)], А. Морозов[d,b,c1)], Р. Рашков[e,f1)]

[a] Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

[b] Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, 117218 Москва, Россия

[c] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 127994 Москва, Россия

[d] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701 Долгопрудный, Россия

[e] Department of Physics, Sofia University, 1164 Sofia, Bulgaria

[f] Institute for Theoretical Physica, Vienna University of Technology, 1040 Vienna, Austria

Поступила в редакцию 27 апреля 2021 г.
После переработки 28 апреля 2021 г.
Принята к публикации 28 апреля 2021 г.

Связь между условиями Вирасоро и интегрируемостью КП (детерминантные формулы) в матричных моделях является старой загадкой. Мы объясняем, что ситуация улучшается, когда интегрируемость дополняется до суперинтегрируемости, т.е. явных формул для гауссовых средних от характеров. В этом случае условия Вирасоро эквивалентны простым рекурсивным формулам, решениями которых являются соответствующие комбинации характеров. Более того, мы можем разделить зависимость от размера матрицы и вывести суперинтегрируемость из условий Вирасоро. Мы описываем один из способов это сделать для гауссовой эрмитовой матричной модели. В результате мы переформулируем условия Вирасоро в виде тождеств на функции Шура, вычисленные в соответствующей точке в пространстве времен.

DOI: 10.31857/S1234567821110082

Один из основных результатов в теории матричных моделей [1–6] – это то, что они удовлетворяют набору тождеств Уорда, что позволяет однозначно определить их гауссовы статсуммы и указать их непертурбативное продолжение вне гауссовой точки. Лучше всего изученной (хоть и не самой простой) является гауссова эрмитова модель [7, 8], которая описывается статсуммой:

$$\mathcal{Z}\{p\} = \int_{N\times N} dM e^{-\operatorname{tr} M^2} e^{\sum_k \frac{p_k}{k}\operatorname{tr} M^k}. \tag{1}$$

Эта статсумма понимается, как (градуированный) ряд по p_k, нормированный так, чтобы $\mathcal{Z}\{0\} = 1$. Вследствие инвариантности интеграла, статсумма удовлетворяет условиям Вирасоро [9–12]

$$\hat{L}_n \mathcal{Z}\{p\} = 0 \tag{2}$$

где

$$\hat{L}_n := \sum_k (k+n) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a)\frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_{n-a}} + 2Nn\frac{\partial}{\partial p_n} + N^2\delta_{n,0} + Np_1\delta_{n+1,0} - (n+2)\frac{\partial}{\partial p_{n+2}}. \tag{3}$$

Одно из ключевых свойств модели – единственность решения условий Вирасоро в виде степенного ряда.

Недавнее наблюдение [13–15] (см. так же [16]) состоит в том, что эта модель также *супер* интегрируема, т.е. коэффициенты c_R разложения

$$\mathcal{Z}\{N,p\} = \sum_R c_R(N)\cdot \chi_R\{p\} \tag{4}$$

по полиномам Шура $\chi_R\{p\}$ тоже явно вычислимы и выражаются через те же самые χ_R, вычисленные в специальной точке. А именно,

$$c_R(N) = \tilde{c}_R \cdot \frac{\chi_R\{N\}}{\chi_R\{\delta_{k,1}\}} = \tilde{c}_R \cdot \prod_{\square\in R}(N + j_\square - i_\square), \tag{5}$$

[1)] e-mail: mironov@lpi.ru; mironov@itep.ru; mishnyakovvv@gmial.com; morozov@itep.ru; rash@phys.uni-sofia.bg; rash@hep.itp.tuwien.ac.at

где $\tilde{c}_R$ не зависят от N и равны:

$$\tilde{c}_R = \chi_R\{\delta_{k,2}\}. \tag{6}$$

В настоящем письме мы объясняем, что такое описание может быть выведено из условий Вирасоро. Это наблюдение вносит вклад в понимание триады суперинтегрируемость-тождества Уорда-интегрируемость и обобщается на множества других моделей как матричных, так и тензорных. Вообще говоря, это может быть сделано разными способами. Пример прямолинейного и подробного вычисление в более сложной модели [17] приведен в [18, 19]. Мы рассмотрим некоторые из этих способов в другом месте, в этом письме мы сосредоточимся на элегантном и не очевидном обходном пути, который наибольшим образом использует суперинтегрируемость.

Наше рассуждение устроено следующим образом:

1) Мы начинаем с разложения (4) и показываем, что при такой подстановке набор всех условий Вирасоро сводится к двум уравнениям:

$$\boxed{\text{Вирасоро} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c} \sum\limits_{R+\square} c_{R+\square}(N) = \sum\limits_{R-\square} (N + j_\square - i_\square)\cdot c_{R-\square}(N) \\ \sum\limits_{R+\square} (j_\square - i_\square)\cdot c_{R+\square}(N) = \sum\limits_{R-\square} (N + j_\square - i_\square)^2\cdot c_{R-\square}(N) \end{array}}\,, \tag{7}$$

где$(i_\square, j_\square)$ – это координаты квадрата, удаленного или прибавленного к диаграмме Юнга.

2) Мы показываем, что система из двух уравнений вида:

$$\sum_{R+\square} \alpha_m(\square)\cdot c_{R+\square}(N) = \sum_{R-\square} \beta_m(\square)\cdot c_{R-\square}(N), \qquad m = 1, 2 \tag{8}$$

в случае невырожденных коэффициентов α_m, β_m всегда имеет единственное решение.

3) Можно было бы просто использовать известный ответ, но более элегантный подход – отделить зависимость от N с помощью (5) и свести систему уравнений (7) к новой системе, фиксирующей не зависящие от N коэффициенты $\tilde{c}_R$:

$$\boxed{\text{Вирасоро} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \sum\limits_{R+\square} \tilde{c}_{R+\square} = 0 \\ \sum\limits_{R+\square} (j_\square - i_\square)\cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum\limits_{R-\square} \tilde{c}_{R-\square} \\ \sum\limits_{R+\square} (j_\square - i_\square)^2\cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum\limits_{R-\square} (j_\square - i_\square)\cdot \tilde{c}_{R-\square} \end{array}}\,. \tag{9}$$

Любые два из этих уравнений уже имеют единственное решение в соответствии с п. 2).

Следовательно, система переопределена, и, находя ее решение, мы лишний раз проверяем, что разложение (5) в действительности верно.

4) В конце концов, мы показываем, что $\tilde{c}_R$, даваемые формулой (6), решают все 3 этих уравнения и, следовательно, решают условия Вирасоро.

Наше рассуждение основано на наборе комбинаторных тождеств, которые могут быть получены либо из фермионного представления для функций Шура [20], либо из прямого вычисления, используя коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона. Последний подход кратко объяснен в Приложении. Замечательно простая форма уравнений (7) и (9) все же требует альтернативного объяснения, которое могло бы, не затрагивая теорию представлений, сделать связь между суперинтегрируемостью и тождествами Уорда более явной и функториальной.

1. Разобьем систему условий Вирасоро (2) на две части

$$\begin{gathered}\hat{L}_{-1}\mathcal{Z}\{N,p\}=0,\\ \sum(k-1)p_k\hat{L}_{k-1}\mathcal{Z}\{N,p\}=0.\end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим сначала $\hat{L}_{-1}$-условие. Используя частные случаи формул (33), (36), мы получим

$$\hat{L}_{-1}\chi_R=\sum_{\square}(N+j_\square-i_\square)\chi_{R+\square}-\sum_{\square}\chi_{R-\square}. \tag{11}$$

Подставляя это в (4), в итоге получим

$$\sum_{R+\square}c_{R+\square}(N)=\sum_{R-\square}(N+j_\square-i_\square)c_{R-\square}(N) \tag{12}$$

Теперь, используя обозначение для "классической" части W-оператора

$$\hat{w}_n:=\sum p_k\hat{l}_{n+k},\quad \hat{l}_n:=\sum(k+n)p_k\frac{\partial}{\partial p_{k+n}}+ \\ +\sum_{a=1}^{n-1}a(n-a)\frac{\partial^2}{\partial p_a\partial p_{n-a}}, \tag{13}$$

можно переписать второе уравнение из (10) в виде

$$\left(\hat{w}_n+2N\sum(k+n)p_k\frac{\partial}{\partial p_{n+k}}+N^2p_{-n}-\right. \\ \left.-\sum(n+2+k)p_k\frac{\partial}{\partial p_{n+2+k}}\right)\mathcal{Z}\{N,p\}=0. \tag{14}$$

В действительности, достаточно рассмотреть только младшее уравнение бесконечной системы (14) при $n=-1$, чтобы однозначно зафиксировать $\mathcal{Z}\{N,p\}$. Таким образом, используя

$$\hat{w}_{-1}\chi_R=\sum_{R+\square}(j_\square-i_\square)^2\chi_{R+\square}, \tag{15}$$

мы немедленно получаем уравнение для коэффициентов разложения (4):

$$\sum_{R+\square}(j_\square-i_\square)c_{R+\square}(N)=\sum_{R-\square}(N+j_\square-i_\square)^2c_{R-\square}(N). \tag{16}$$

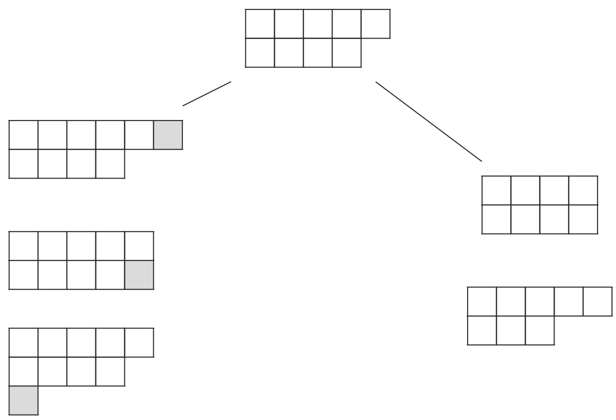
2. В качестве следующего шага давайте объясним, почему наша процедура с заменой всей борелевской части алгебры Вирасоро на L_{-1}- и w_{-1}- условия приводит к единственному решению, которое может быть построено рекурсией уравнения (7). Более того, верно более сильное утверждение: любые два уравнения вида

$$\sum_{R+\square}\alpha_m(\square)c_{R+\square}=\sum_{R-\square}\beta_m(\square)c_{R-\square},\quad m=1,2 \tag{17}$$

могут быть решены рекурсивно единственным образом, если коэффициенты α_m, β_m невырождены.

Действительно, для любого R заданной длины $l(R)$ эти уравнения включают только одну диаграмму, которая имеет длину не меньше или равную $l(R)$, а именно – $[R_1,\dots R_{l(R)},1]$. Благодаря тому, что мы имеем два уравнения, мы можем исключить этот коэффициент и получить рекурсию, включающую только диаграммы фиксированной длины. Одновременно, эти уравнения определяют и сам $c_{[R_1,\dots R_{l(R)},1]}$, что служит начальным условием на следующем уровне.

Например, на уровне $l(R)=2$, если мы хотим перейти от $c_{[r,4]}$ к $c_{[r,5]}$, уравнения будут включать следующие разбиения:



Покажем, как это работает порядок за порядком и начнем с симметрических представлений:

$$\begin{cases}c_{[r+1]}+c_{[r,1]}=(N+r-1)c_{[r-1]}\\ rc_{[r+1]}-c_{[r,1]}=(N+r-1)^2c_{[r-1]}\end{cases}\Rightarrow \\ \Rightarrow (r+1)c_{[r+1]}=(N+r-1)(N+r)c_{[r-1]}. \tag{18}$$

Чтобы зафиксировать начальные условия, выберем $R=[\ ]$, что дает

$$c_{[1]}=0, \tag{19}$$

и нормируем $c_{[\ ]}=1$. Таким образом, получаем

$$c_{[r]}=\begin{cases}\dfrac{\prod_{i=1}^{r-1}(N+r-i)}{r!!} & r=2k\\[2ex] 0 & r=2k+1\end{cases}. \tag{20}$$

Из того же уравнения получаем

$$c_{[r,1]} = \begin{cases} \dfrac{(N-1)\prod\limits_{k=0}^{r-1}(N+k)}{(r+1)!!} & r = 2k-1 \\ \\ 0 & r = 2k \end{cases}. \tag{21}$$

Для разбиений длины $l(R) = 2$ рекурсия начинается с $[r,2]$:

$$\begin{cases} c_{[r,1]} + c_{[r-1,2]} + c_{[r-1,1,1]} = (N+r-2)c_{[r-2,1]} + (N-1)c_{[r-1]} \\ (r-1)c_{[r,1]} + 0 - 2c_{[r-1,1,1]} = (N+r-2)^2 c_{[r-2,1]} + (N-1)^2 c_{[r-1]} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (r+1)c_{[r,1]} + 2c_{[r-1,2]} = (N+r-2)(N+r)c_{[r-2,1]} + (N-1)(N+1)c_{[r-1]} \tag{22}$$

Следовательно,

$$c_{[r,2]} = \frac{N(N-1)\prod\limits_{k=0}^{r-1}(N+k)}{2(r!!)}$$
$$c_{[r,1,1]} = \frac{r}{2((r+2)!!)} \cdot (N-2)(N-1)\prod_{k=0}^{r-1}(N+k) \tag{23}$$

для разбиений с четным r, тогда как при нечетном r коэффициенты равны нулю.
Для $[r,3]$:

$$(r+2)c_{[r+1,2]} + 3c_{[r,3]} = (N+r-2)(N+2)c_{[r-1,2]} + N^2 c_{[r-1]} \tag{24}$$

и так далее.

3. Мы можем показать, что решение имеет вид (5)–(6), действуя рекурсивно, как в предыдущем параграфе. Вместо этого, проверим явно, что ответ дается (5)–(6).

Начнем с формулы (5). Из нее следует, что

$$c_{R+\square}(N) = \tilde{c}_{R+\square} \cdot (N + j_\square - i_\square) \cdot \frac{c_R(N)}{\tilde{c}_R}, \qquad (N + j_\square - i_\square) \cdot c_{R-\square}(N) = \tilde{c}_{R-\square} \cdot \frac{c_R(N)}{\tilde{c}_R}. \tag{25}$$

Теперь подставим эти формулы в уравнения (7),

$$\sum_\square (N + j_\square - i_\square) \cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum_\square \tilde{c}_{R-\square}, \qquad \sum_\square (j_\square - i_\square) \cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum_\square (N + j_\square - i_\square) \cdot \tilde{c}_{R-\square} \tag{26}$$

и рассмотрим каждый порядок по N. Это даст *три* уравнения (9).

Как мы объяснили в предыдущем параграфе, любые два из этих трех уравнений фиксируют единственное решение, таким образом, система переопределена. В следующем параграфе мы проверим, что решением является (6), и оно удовлетворяет всем трем уравнениям одновременно.

4. Чтобы доказать, что (9) выполнены для

$$\tilde{c}_R = \chi_R\{\delta_{k,2}\}, \tag{27}$$

мы используем тождества (15), (30), (33), (36),

$$p_1 \chi_R = \sum_{R+\square} \chi_{R+\square}$$
$$\hat{l}_{-1}\chi_R = \sum_{R+\square} (j_\square - i_\square)\chi_{R+\square} \qquad \frac{\partial \chi_R}{\partial p_1} = \sum_{R-\square} \chi_{R-\square} \tag{28}$$
$$\hat{w}_{-1}\chi_R = \sum_{R+\square} (j_\square - i_\square)^2 \chi_{R+\square} \qquad \hat{l}_1 \chi_R = \sum_{R-\square} (j_\square - i_\square)\chi_{R-\square}$$

и подставим в них $p_k = \delta_{k,2}$:

$$p_1\chi_R\big|_{p_k=\delta_{k,2}} = 0$$

$$\hat{l}_{-1}\chi_R\Big|_{p_k=\delta_{k,2}} = \sum_k (k-1)p_k\frac{\partial\chi_R}{\partial p_{k-1}}\bigg|_{p_k=\delta_{k,2}} = \frac{\partial\chi_R}{\partial p_1}\bigg|_{p_k=\delta_{k,2}} \tag{29}$$

$$\hat{w}_{-1}\chi_R\big|_{p_k=\delta_{k,2}} = \sum p_k\hat{l}_{k-1}\chi_R\Big|_{p_k=\delta_{k,2}} = \hat{l}_1\chi_R\Big|_{p_k=\delta_{k,2}}$$

Подставляя сюда (28), мы получим в точности (9) для $\tilde{c}_R = \chi_R\{\delta_{k,2}\}$.

Приложение. В рассуждениях выше мы использовали следующие свойства полиномов Шура [21]:

- Формулу Пьери,

$$p_1\chi_R\{p\} = \sum_{\square}\chi_{R+\square}\{p\}, \tag{30}$$

где сумма пробегает все возможные диаграммы Юнга, полученые добавлением клетки к R.

- Используя формулу Фробениуса

$$p_k = \sum_Q \psi_Q([k])\chi_Q, \tag{31}$$

где характер симметрической группы $\psi_Q([k]) = (-1)^a$ для $Q=[a,1^{k-a}]$, и $\psi_Q([k])=0$ в других случаях, и

$$\chi_Q\Big\{k\frac{\partial}{\partial p_k}\Big\}\cdot\chi_R\{p_k\} = \chi_{R/Q}\{p_k\}, \tag{32}$$

где $\chi_{R/Q}$ косая функция Шура, мы получим

$$k\frac{\partial\chi_R}{\partial p_k} = \sum_Q\psi_Q([k])\chi_{R/Q} = \sum_{a,P}(-1)^a\mathcal{N}^R_{P,[a,1^{k-a}]}\chi_P. \tag{33}$$

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона определены формулой:

$$\chi_P\cdot\chi_Q = \sum_R\mathcal{N}^R_{PQ}\chi_R. \tag{34}$$

- Из (31) и (34) следует, что

$$p_k\chi_R\{p\} = \sum\psi_Q([k])\mathcal{N}^P_{QR}\chi_P = \sum_{a,P}(-1)^a\mathcal{N}^P_{R,[a,1^{k-a}]}\chi_P, \tag{35}$$

и, следовательно,

$$\sum kp_{k+n}\frac{\partial\chi_R}{\partial p_k} = \sum_S {}_nB^S_R\chi_S, \tag{36}$$

где, в частности,

$${}_{\pm1}B^S_R := \sum_{k,a,b,P}(-1)^{a+b}\mathcal{N}^R_{P,[a,1^{k-a}]}\mathcal{N}^S_{P,[b,1^{k-b\pm1}]} = (j_\square - i_\square)\delta_{S,R\pm\square}. \tag{37}$$

Мы благодарны Е. Зенкевичу за полезное обсуждение.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии 19-51-18006 (А. Миронов, А. Морозов), РФФИ и ТУБИТАК в рамках научного проекта 21-51-46010 (А. Миронов, А. Морозов), РФФИ и Министерством по науке и технологиям Тайваня в рамках научного проекта 21-52-52004 (А. Миронов, А. Морозов, В. Мишняков). Работа также частично поддержана грантом Фонда развития теоретической физики "Базис" (А. Миронов), грантами РФФИ 19-01-00680 (А. Миронов, В. Мишняков) и 19-02-00815 (А. Миронов). Исследование Р. Рашкова было частично поддержано FNI/BG-RU-2018/246, BNSF, гранты H-28/5 и DN-18/1.

1. A. Morozov, Phys.-Uspekhi (UFN) **37**, 1 (1994).
2. A. Morozov, hep-th/9502091.
3. A. Morozov, hep-th/0502010.
4. A. Mironov, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 4355 (1994).
5. A. Mironov, Phys. Part. Nucl. **33**, 537 (2002).
6. A. Mironov, hep-th/9409190.
7. E. P. Wigner, Ann. Math. **53**, 36 (1951).
8. F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).
9. F. David, Mod. Phys. Lett. A **5**, 1019 (1990).
10. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **252**, 47 (1990).

11. J. Ambjørn and Yu. Makeenko, Mod. Phys. Lett. A **5**, 1753 (1990).
12. H. Itoyama and Y. Matsuo, Phys. Lett. B **255**, 20 (1991).
13. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **771**, 503 (2017); arXiv:1705.00976.
14. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **774**, 210 (2017); arXiv:1706.03667.
15. A. Mironov and A. Morozov, JHEP **1808**, 163 (2018); arXiv:1807.02409.
16. S. Natanzon and A. Orlov, arXiv:1407.8323.
17. A. Mironov and A. Morozov, Eur. Phys. J. C **81**, 270 (2021); arXiv:2011.12917.
18. X. Liu and C. Yang, arXiv:2103.14318.
19. X. Liu and C. Yang, arXiv:2104.01357.
20. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, and T. Miwa, J. Phys. Soc. Jpn. **50**, 3806 (1981).
21. W. Fulton, *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*, LMS, Cambridge University Press, London (1997)