ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 2, с. 136–146

УДК 539.374

О ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В МАТЕРИАЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ, НАСАЖЕННОГО НА ЖЕСТКИЙ ВАЛ В УСЛОВИЯХ ЕГО ПЕРЕМЕННОГО ВРАЩЕНИЯ

С. В. Фирсов[a,*]

[a] *ИМиМ, ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация*

**e-mail: firsov.s.new@yandex.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.
После доработки 24.05.2022 г.
Принята к публикации 26.05.2022 г.

Расчитывается развитие вязкопластического течения в материале цилиндрического слоя, помещенного на жесткий цилиндрический вал, и вращающегося вместе с ним вокруг их общей оси. Определяются в зависимости от возрастающей скорости вращения до максимальной место и моменты времени начала вязкопластического течения, закономерности продвижения области течения, изменяющиеся деформации и напряжения в деформируемом материале. В качестве условия вязкопластического течения принимается соответствующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений. Для целей тестирования программ расчетов получено точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении материала при вращении составного цилиндра с постоянной скоростью.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, вращающийся цилиндр, деформирование за счет инертностных сил

DOI: 10.31857/S0572329922600359, **EDN:** DFVULC

1. Введение. С тех пор как был сформулирован практический интерес к задачам о приобретении материалом вращающихся цилиндров и дисков необратимых деформаций [1, 2] такая задача становится одной из классических для теории ползучести и теории пластического течения. Рассматривалась она неоднократно [3–7]. При использовании кусочно-линейных потенциалов (классических поверхностей нагружения) удалось получить точные или численно-аналитические решения задачи [8–10]. Совместное производство необратимых деформаций за счет инертностных массовых сил как в медленном процессе ползучести материала, так и в более быстром процессе пластического течения рассматривалось в [10, 11].

2. Исходные соотношения принимаемой математической модели. Деформируемый материал полагаем упруговязкопластическим, допускающим лишь малые деформации. Полные деформации $\mathbf{d}$ в материале считаем представленными суммой его обратимых (упругих) деформаций $\mathbf{e}$ и необратимых вязкопластических $\mathbf{p}$ деформаций

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \tag{2.1}$$

В (2.1) $\mathbf{u}$ – вектор перемещений. Упругие деформации задают напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ в деформируемом материале.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathrm{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e} \tag{2.2}$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе, $\mathbf{I}$ — единичный тензор составленный из символов Кронекера. Пластические деформации производятся в материале в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружений (текучести) в пространстве напряжений $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ (k — предел текучести). В условиях принятия принципа Мизеса [12] функция $f(\boldsymbol{\sigma}, k)$ оказывается пластическим потенциалом со следованием ассоциированного с поверхностью нагружения закона пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Phi\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \quad \Phi > 0 \tag{2.3}$$

В качестве условия пластического течения (поверхности нагружения) будем использовать следующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений Мизеса [13, 14]

$$(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta})\cdot(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta}) = \frac{8}{3}k^2, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{2.4}$$

Вместе с уравнением движения (равновесия) система уравнений (2.1)–(2.4) составляет замкнутую систему уравнений, которой подчинено деформирование упруговязкопластического тела.

3. Постановка задачи. Первоначальное упругое деформирование. Рассматриваем двухслойный вал конечной длинны. Внутреннюю часть вала $0 \le r \le R_1$ полагаем абсолютно жесткой, а часть $R_1 \le r \le R_2$ деформируемой. Считаем, что вал вращается вокруг своей оси с переменной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$. Для деформаций материала такого составного цилиндра имеем в цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной с вращающимся цилиндром

$$\begin{gathered} u_r = u_r(r,t), \quad u_\varphi = u_\varphi(r,t), \quad u_z = 0, \quad d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = u_{r,r} \\ d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_r, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz}, \quad d_{\varphi r} = \frac{1}{2}(u_{\varphi,r} - r^{-1}u_\varphi) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Когда торцы жестко закреплены, тогда $d_{zz} = 0$. Если они свободны, то считаем $d_{zz} = f(t)$. Такой случай называют обобщенной плоской деформацией и для определения d_{zz} вводят ограничения на осевую нагрузку

$$2\pi\int_{R_1}^{R_2} r\sigma_{zz}(r,t)dr = 0 \tag{3.2}$$

Далее рассматривается такой случай. Уравнение движения во введенной системе координат принимают форму

$$\begin{gathered} \sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\rho r\omega^2 \\ \sigma_{\varphi r,r} + 2r^{-1}\sigma_{\varphi r} = -\rho r\dot{\omega} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь, также как и в (3.1) индекс после запятой обозначает дифференцирование по данной пространственной переменной; точкой обозначается производная по времени. Введем безразмерные зависимые и независимые переменные

$$\begin{gathered} r = R_2\xi, \quad \sigma_{ij} = \sigma_0\tilde{\sigma}_{ij}, \quad u_r = R_2\tilde{u}_r, \quad u_\varphi = R_2\tilde{u}_\varphi \\ \psi = R_2\sqrt{\frac{\rho}{\sigma_0}}\omega, \quad t = R_2\sqrt{\rho\sigma_0^{-1}}\tau \end{gathered} \tag{3.4}$$

Для постоянных задачи принимаем

$$\xi_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.2, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\sigma_0} = 250, \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma_0} = 195, \quad \zeta = \frac{\eta}{R_2\sqrt{\rho\sigma_0}} = 100 \tag{3.5}$$

Здесь ρ — плотность деформируемого материала. Далее знак “~” опускаем, так как будут использоваться только безразмерные переменные. В безразмерных переменных уравнение (3.3) принимает форму

$$\begin{aligned} \xi^2 u_{r,\xi\xi} + \xi u_{r,\xi} - u_r &= -\frac{\xi^3\psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ \xi^2 u_{\varphi,\xi\xi} + \xi u_{\varphi,\xi} - u_\varphi &= -\frac{\xi^3\dot{\psi}}{\beta} \end{aligned} \tag{3.6}$$

В (3.6) следует иметь ввиду, что $\dot{\psi} = \dfrac{d\psi}{d\tau}$. Проинтегрировав (3.6), запишем

$$\begin{aligned} u_r &= c_1\xi + c_2\xi^{-1} - \frac{1}{8}\frac{\xi^3\psi^2}{\alpha + 2\beta} \\ u_\varphi &= c_3\xi + c_4\xi^{-1} - \frac{\xi^3\dot{\psi}}{8\beta} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для напряжений, следуя (2.2) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2(\alpha + \beta)c_1 - 2\beta c_2\xi^{-2} + \alpha d_{zz} - \frac{1}{4}\frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta}\xi^2\psi^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\alpha + \beta)c_1 + 2\beta c_2\xi^{-2} + \alpha d_{zz} - \frac{1}{4}\frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}\xi^2\psi^2 \\ \sigma_{zz} &= 2\alpha c_1 + (\alpha + 2\beta)d_{zz} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta}\xi^2\psi^2 \\ \sigma_{\varphi r} &= -2\beta c_4\xi^{-2} - \frac{1}{4}\xi^2\psi^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из (3.2) находим d_{zz}, зависящую только от безразмерного времени τ

$$d_{zz} = \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta}\left(\frac{1}{4}\frac{\xi_0^2 + 1}{\alpha + 2\beta}\psi^2 - 2c_1\right) \tag{3.9}$$

Постоянные в каждый момент времени c_1, c_2, c_3, c_4 находим из граничных условий. Последние имеют вид

$$u_r(\xi_0, \tau) = 0, \quad u_\varphi(\xi_0, \tau) = 0, \quad \sigma_{rr}(1, \tau) = 0, \quad \sigma_{\varphi r}(1, \tau) = 0 \tag{3.10}$$

Выполняя условия (3.10), находим

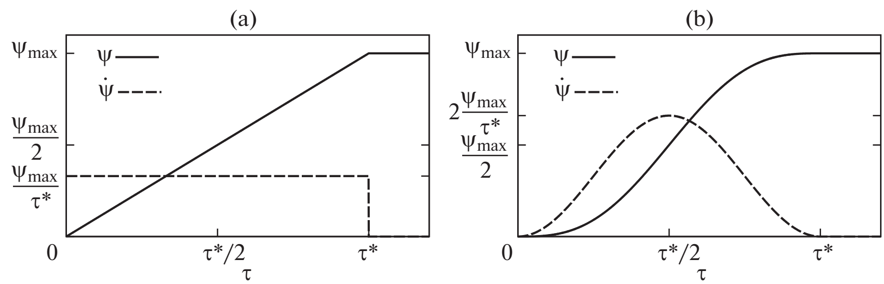

Рис. 1. Варианты задания угловой скорости $\psi(\tau)$ и ускорения $\dot\psi(\tau)$: линейная (a) и гладкая (b).

$$
\begin{gathered}
c_1 = \frac{\beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^4 - \alpha^2\xi_0^2 + (\alpha + \beta)(\alpha + 6\beta)}{8\beta(\alpha + 2\beta)((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))}\psi^2 \\
c_2 = \frac{1}{8\beta}\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}\frac{(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 - (\alpha + 6\beta)}{(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta)}\xi_0^2\psi^2 \\
c_3 = \frac{\xi_0^4 + 1}{8\beta\xi_0^2}\dot\psi, \quad c_4 = -\frac{1}{8\beta}\dot\psi
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Решение задачи (3.7)–(3.11) справедливо до моментов времени до наступления вязкопластического течения.

4. Вязкопластическое течение. Начало вязкопластического течения связано с выполнением в некоторый расчитываемый момент времени условия (2.4). В такой начальный момент времени в (2.4) скорости необратимых деформаций θ следует положить равными нулю ($\theta = 0$). Во введенных безразмерных переменных условие (2.4) принимает форму

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} - 3\sigma_{\varphi r}^2} = 1 \tag{4.1}
$$

После подстановки в (4.1) напряжений, вычисленных согласно (3.8) и (3.11), находим, что это условие первоначально выполнится на поверхности $\xi = \xi_0$ ($\boldsymbol{\Sigma}(\xi_0, \tau) = 1$). Это произойдет при следующих безразмерных значениях для угловой скорости ψ_p и углового ускорения $\dot\psi_p$

$$
\begin{gathered}
\psi_p^2 = \frac{\alpha + 2\beta}{2\xi_0^2(1 - \xi_0^2)}((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + 3\alpha + 2\beta)\sqrt{16\xi_0^4 - 9(1 - \xi_0^4)^2\dot\psi_p^2}(3\alpha^4 + 27\alpha^3\beta + \\
+ 85\alpha^2\beta^2 + 96\alpha\beta^3 + 36\beta^4 + \beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^2(\beta(\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha^2 + 16\alpha\beta + 12\beta^2)))^{-\frac{1}{2}}
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

$$
\dot\psi < \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \tag{4.3}
$$

Вязкопластическое течение на поверхности $\xi = \xi_0$ может наступить при предельном значении $\dot\psi_p$, когда неравенство (4.3) обратится в равенство. При равноускорен-

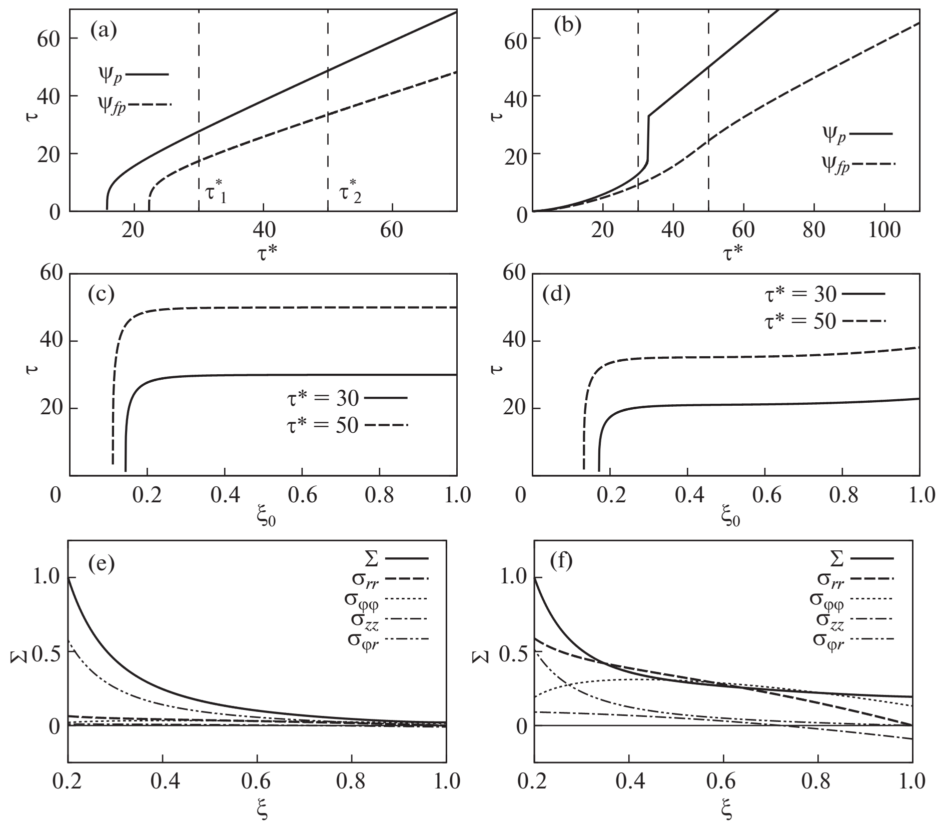

Рис. 2. Зависимость времени начала пластического течения от времени разгона $\boldsymbol{\tau}^*$ при линейном росте угловой скорости (a) и при плавном (b), а также от положения внутренней границы ξ_0 для линейной зависимости при $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ (c) и $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ (d). Распределение напряжений в материале перед началом пластического течения при плавном разгоне и $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ для $\boldsymbol{\tau}^* = 30$ (e) и $\boldsymbol{\tau}^* = 50$ (f).

ном (с самого начала) вращении, когда задаваемая функция линейная $(\psi(\tau) = a\tau)$ вязкопластическое течение наступает с момента начала вращения, если

$$a = \pm\frac{\xi_0^2}{\sqrt{3}(1 - \xi_0^2)}$$

Такой случай иллюстрируется зависимостями $\psi = \psi(\tau)$ и $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\tau)$ на рис. 1.a, где $\psi_{\max}$ – предельно допустимая угловая скорость вращения, τ^* – момент времени, когда такая угловая скорость достигается. Здесь будем задавать вращение цилиндра, постулируя зависимости

$$\psi(\tau) = \psi_{\max}\left(\frac{\tau}{\tau^*} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\tau}{\tau^*}\right), \quad \dot{\psi}(\tau) = \frac{\psi_{\max}}{\tau^*}\left(1 - \cos\frac{2\pi\tau}{\tau^*}\right) \tag{4.4}$$

Эти функции иллюстрируются графически на рис. 1b.

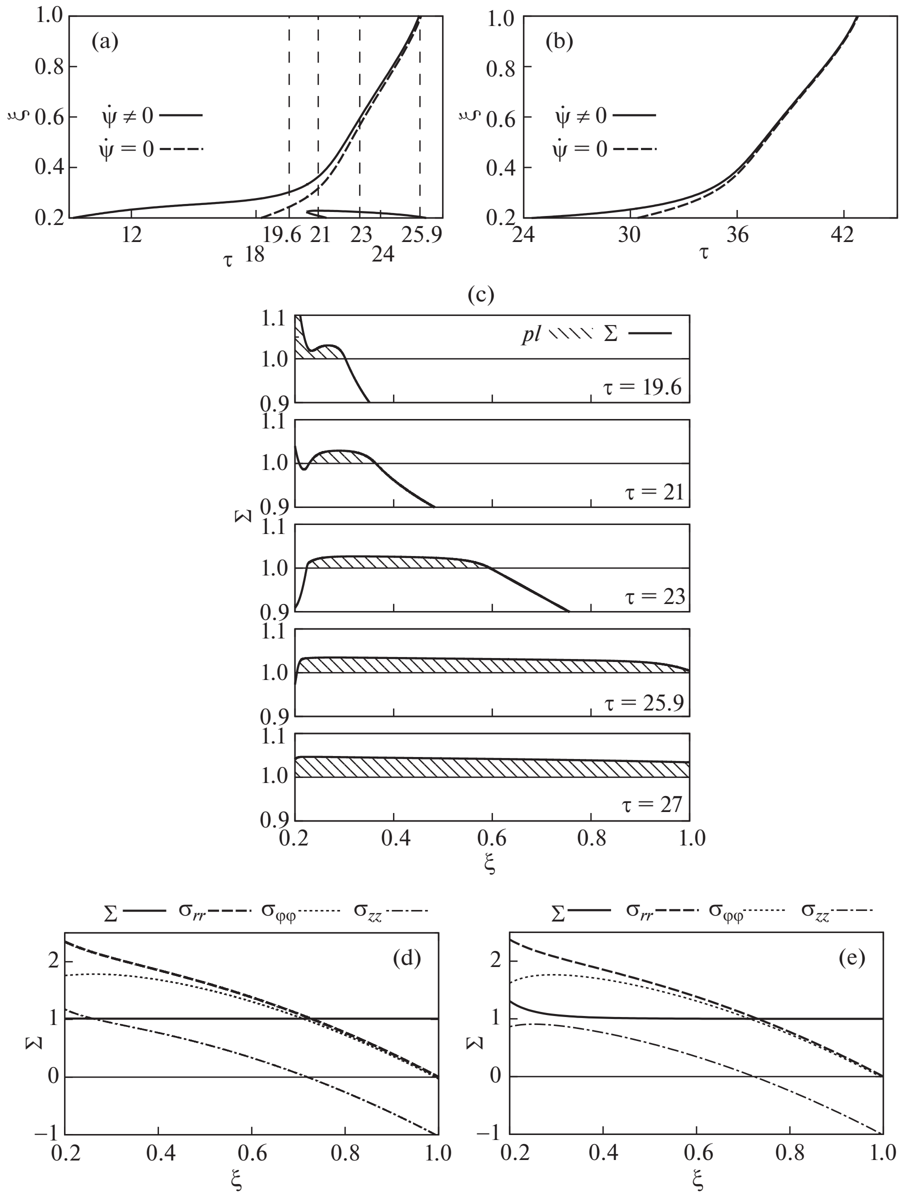

Рис. 3. Результаты численных расчетов. Движение границ областей пластического течения при $\boldsymbol{\tau}^* = 30$ (a) и $\boldsymbol{\tau}^* = 50$ (b). Распределение интенсивности напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ в различные моменты времени при $\boldsymbol{\tau}^* = 30$ и с учетом углового ускорения (c). Распределение напряжений в среде при установившемся вязкопластическом течении при численном (d) и аналитическом (e) решениях.

Уравнения равновесия в перемещениях с учетом сил инерции (аналог (3.6)) теперь будут включать в себя неизвестные пластические деформации.

$$\xi^2 u_{r,\xi\xi} + \xi u_{r,\xi} - u_r = \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}\xi(p_{\varphi\varphi} - p_{rr}) + \xi^2 p_{rr,\xi} + \xi^2\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}(p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi^3\psi^2}{\alpha+2\beta}$$
$$\xi^2 u_{\varphi,\xi\xi} + \xi u_{\varphi,\xi} - u_\varphi = 4\xi p_{\varphi r} + 2\xi^2 p_{\varphi r,\xi} - \frac{\xi^3\psi'}{\beta} \tag{4.5}$$

Запишем решение (4.5) в форме

$$u_r = C_1\xi + C_2\xi^{-1} + \frac{\beta\beta}{\alpha+2\beta}\Phi_1 + \xi^{-1}\Phi_2 - \frac{1}{8}\frac{\xi^3\psi^2}{\alpha+2\beta}$$

$$u_\varphi = C_3\xi + C_4\xi^{-1} + 2\xi I_3 - \frac{\xi^3\psi'}{8\beta}$$

$$\Phi_1(\xi,\tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1}(p_{rr}(x,\tau) - p_{\varphi\varphi}(x,\tau))dx \tag{4.6}$$

$$\Phi_2(\xi,\tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} x\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}(p_{rr}(x,\tau) + p_{\varphi\varphi}(x,\tau)) + \frac{\alpha}{\alpha+2\beta}p_{zz}(x,\tau)\right)dx$$

$$\Phi_3(\xi,\tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1}p_{\varphi r}(x,\tau)dx$$

В (4.6) следует учитывать, что постоянные в рассматриваемый момент времени C_j $(j = 1,2,3,4)$ являются все же функциями безразмерного времени τ, а Φ_i $(i = 1,2,3)$ определяются неизвестными пластическими деформациями. Для компонент тензора напряжений из (2.2) и (4.6) следуют зависимости

$$\sigma_{rr} = 2(\alpha+\beta)C_1 - 2\beta\xi^{-2}C_2 + \alpha d_{zz} + \frac{2\beta(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}\Phi_1 - 2\beta\xi^{-2}\Phi_2 - \frac{1}{4}\frac{2\alpha+3\beta}{\alpha+2\beta}\xi^2\psi^2$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2(\alpha+\beta)C_1 + 2\beta\xi^{-2}C_2 + \alpha d_{zz} - 2\beta\left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}p_{zz} + 2\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}p_{\varphi\varphi}\right) +$$
$$+ 2\beta\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\Phi_1 + 2\beta\xi^{-2}\Phi_2 - \frac{1}{4}\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\xi^2\psi^2 \tag{4.7}$$
$$\sigma_{zz} = 2\alpha C_1 + (\alpha+2\beta)d_{zz} - 4\beta\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}p_{zz} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha+2\beta}(\Phi_1 - p_{\varphi\varphi}) - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}\xi^2\psi^2$$

$$\sigma_{\varphi r} = -2\beta C_4\xi^{-2} - \frac{1}{4}\xi^2\dot\psi$$

Выполняя ограничение (3.2), налагаемое на значение осевых усилий, находим

$$d_{zz} = \frac{\alpha}{\alpha+2\beta}\left(\frac{1}{4}\frac{\xi_0^2+1}{\alpha+2\beta}\psi^2 - 2C_1\right) + \frac{2\beta}{(\alpha+2\beta)(\xi_0^2-1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}\Phi_1(1,\tau) - \Phi_4(1,\tau)\right)$$
$$\Phi_4(\xi,\tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} x\left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}(p_{rr}(x,\tau) + p_{\varphi\varphi}(x,\tau)) + 4\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}p_{zz}(x,\tau)\right)dx \tag{4.8}$$

Исходя из граничных условий (3.10), вычисляем постоянные в этот момент времени $C_j\ (j = 1,2,3,4)$

$$C_1 = \left((\alpha + 2\beta)(I_2(1,\tau) - I_1(1,\tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta}(1 - \xi_0^2)^{-1}(\alpha I_1(1,\tau) - I_4(1,\tau)) + \right.$$
$$\left. + \left(\beta\xi_0^4 - \frac{\alpha^2\xi_0^2}{\alpha + 2\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}(\alpha + 6\beta)\right)\frac{\psi^2}{8\beta}\right)((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))^{-1}$$

$$C_2 = \xi_0^2\left((\alpha + 2\beta)(I_1(1,\tau) - I_2(1,\tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta}\frac{I_4(1,\tau) - \alpha I_1(1,\tau)}{1 - \xi_0^2} + \right. \tag{4.9}$$
$$\left. + \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}\left((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 - (\alpha + 6\beta)\right)\frac{\psi^2}{8\beta}\right)((\alpha + 2\beta)\xi_0^2 + (3\alpha + 2\beta))^{-1}$$
$$C_3 = \frac{\xi_0^4 + 1}{8\beta\xi_0^2}\dot\psi, \quad C_4 = -\frac{1}{8\beta}\dot\psi$$

В соотношениях (4.6)—(4.9) компоненты пластических деформаций остаются неизвестными. Для отыскания распределения этих деформаций в каждый рассматриваемый момент времени следует воспользоваться ассоциированным с выбранной поверхностью нагружения (2.4) законом вязкопластического течения (2.3). Таким способом получаем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial\tau} = \frac{1}{3\zeta}\frac{\Sigma - 1}{\Sigma}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\right)$$
$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial\tau} = \frac{1}{3\zeta}\frac{\Sigma - 1}{\Sigma}\left(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}\right)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial p_{zz}}{\partial\tau} = \frac{1}{3\zeta}\frac{\Sigma - 1}{\Sigma}\left(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) \tag{4.10}$$
$$\varepsilon_{\varphi r} = \frac{\partial p_{\varphi r}}{\partial\tau} = \frac{1}{\zeta}\frac{\Sigma - 1}{\Sigma}\sigma_{\varphi r}$$

В момент начала вязкопластического течения при $\Sigma = 1$ пластические деформации в деформируемом материале равны нулю. Для расчетов следующих шагов по времени представляем (4.10) его конечно-разностным аналогом, включая последний в общий алгоритм расчетов последовательными шагами по времени.

5. Некоторые результаты расчетов. Далее, если это специально не оговорено, результаты расчетов будут представляться при следующем выборе для постоянных деформируемого материала и его геометрии

$$\xi_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.2, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\sigma_0} = 250, \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma_0} = 195, \quad \zeta = \frac{\eta}{R_2\sqrt{\rho\sigma_0}} = 100 \tag{5.1}$$

Согласно (4.4) параметрами задачи являются $\psi_{\max}$ и τ^* — момент времени, в который значение $\psi_{\max}$ достигается. С целью задания (оценки) значения $\psi_{\max}$ в (4.4) имеем возможность вычислить его в момент начала вязкопластического течения, если не учитывать угловое ускорение. Такое значение, согласно (4.2), оказалось равным $\psi_{\max} = \psi_p \approx 1.45893$. Другое значение $\psi_{\max}$ моно связать с переходом всего материала деформируемой части вращающегося цилиндра в пластическое состояние. Тогда, полагая угловое ускорение нулевым, получаем значение $\psi_{\max} = \psi_{fp} \approx 2.06118$. Дальнейшие результаты расчетов связываются с такими двумя значениями $\psi_{\max}$ в (4.4).

На рис. 2,a и рис. 2,b указывается безразмерное время τ начала вязкопластического течения в зависимости от назначаемого параметра τ^*. При этом на рис. 2,a данная зависимость получена при равноускоренном начальном вращении, а на рис. 2,b для закона вращения (4.4). Сплошная линия соответствует $\psi_{\max} = \psi_p$, пунктирная $\psi_{\max} = \psi_{fp}$.

В (5.1) геометрический параметр ξ_0 также является параметром задачи. Если фиксировать τ^*, то можно указать время начала вязкопластического течения в зависимости от назначаемого параметра ξ_0. Такие графические зависимости представлены для $\psi_{\max} = \psi_p$ на рис. 2,c и для $\psi_{\max} = \psi_{fp}$ на рис. 2,d при $\tau^* = 30$ (сплошная линия) и $\tau^* = 50$ (пунктирная линия).

Распределение напряжений по деформируемому материалу перед началом пластического течения иллюстрируют графические зависимости рис. 2,e ($\tau^* = 30$) и рис. 2,f ($\tau^* = 50$). При этом в (4.4) принимается, что $\psi_{\max} = \psi_{fp}$.

6. Установившееся вязкопластическое течение. Согласно (4.4) при $\tau \geq \tau^*$ $\psi(\tau) = \psi_{\max}$ – const и $\dot{\psi}(\tau) = 0$. Если $\psi_{\max} \geq \psi_{fp}$, то деформируемая часть $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ вращающегося цилиндра будет находиться в пластическом состоянии. Возможно ли в таком случае предельное установившееся пластическое течение? Расчетом параметров такого течения, покажем, что оно осуществляется. Из (3.1) в случае установившегося вязкопластического течения с учетом того, что скорости пластических деформаций отождествляются со скоростями полных деформаций, получаем

$$\varepsilon_{rr} = v_{r,\xi}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \xi^{-1}v_r, \quad \varepsilon_{zz} = \text{const}, \quad \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2}(v_{\varphi,\xi} - \xi^{-1}v_\varphi) \tag{6.1}$$

Учитывая, что согласно выбранному условию пластического течения деформируемый материал пластически несжимаем, запишем

$$v_{r,\xi} + \xi^{-1}v_r + \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = 0, \quad v_r = \xi^{-1}C_1 - \frac{1}{2}\xi\boldsymbol{\varepsilon}_{zz} \tag{6.2}$$

Если учесть кинематику такого установившегося вязкопластического течения (6.1) и (6.2), то из (4.10) следуют соотношения

$$\begin{gathered}
C_1 = \xi^2\frac{\Sigma - 1}{2\zeta\Sigma}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \\
\varepsilon_{zz} = \frac{\Sigma - 1}{3\zeta\Sigma}\left(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) \\
v_{\varphi,\xi} - \xi^{-1}v_{\boldsymbol{\sigma}} = 2\frac{\Sigma - 1}{\zeta\Sigma}\sigma_{\varphi r} \\
\sigma_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\xi^2\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}}{4C_1}\right)\sigma_{rr} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\xi^2\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}}{4C_1}\right)\sigma_{\varphi\varphi}
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Проинтегрировав уравнение равновесия (3.3), получим

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = C_2 - \zeta\xi^{-2}C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\ln\xi - \ln\left(2 + \sqrt{4 + 3\frac{\xi^4\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^2}{C_1^2}}\right)\right) - \frac{1}{2}\xi^2\psi^2 \\
\sigma_{\varphi\varphi} = 2\zeta\xi^{-2}C_1 + \sigma_{rr} + 4\left(12 + 9\frac{\xi^4\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^2}{C_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{\varphi r} = \xi^{-2}C_3
\end{gathered} \tag{6.4}$$

Постоянные интегрирования в рассматриваемый момент времени находим при выполнении граничных условий (3.10)

$$C_1 = \frac{1}{2}\xi_0^2\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0$$
$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2 + \sqrt{4 + 12\xi_0^{-4}}) + \frac{1}{2}\zeta\xi_0^2\varepsilon_{zz} + \frac{1}{2}\psi^2 \tag{6.5}$$

Неизвестное $\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}$ в (6.2)–(6.5) вычисляется при выполнении условия (3.2)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{2\zeta}\frac{(1-\xi_0^2)^2}{\xi_0^4 + 2\xi_0^2 - 3}\psi^2 + \frac{2}{\sqrt{3}\zeta}\frac{\xi_0^2}{\xi_0^4 + 2\xi_0^2 - 3}\left(\sqrt{1 + 3\xi_0^{-4}} - \ln\left(\frac{1}{3}(\xi_0^2 + \sqrt{\xi_0^4 + 3})\right) - 2\right) \tag{6.6}$$

Для того, чтобы установившее вязкопластическое течение в соответствии с точным решением (6.2)–(6.6) осуществилось необходимо, чтобы угловая скорость достигла значения ψ_{fp}. Для этого $\psi_{\max}$ в (4.4) должно быть не меньше этого значения. Зависимости (6.4)–(6.5) позволяют вычислить данное значение условием $\boldsymbol{\Sigma}(1,\tau) \geq 1$

$$\psi_{fp} \geq \frac{2}{1-\xi_0^2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{3 - 3\xi_0^4 - 4\xi_0^2}{\sqrt{\xi_0^4 + 3}} + \xi_0^2\left(2 - \ln\frac{3}{\xi_0^2 + \sqrt{\xi_0^4 + 3}}\right)} \tag{6.7}$$

Наименьшее из возможных ψ_{fp} использовалось при задании вращения в (4.4) $\psi_{\max} = \psi_{fp} \approx 2.06118$, когда проводились численные расчеты (рис. 3).

Сравнение результатов численных расчетов с аналогичными, получаемыми при точном решении задачи, приведено на рис. 3,d и e соответственно, где представлено распределение напряжений в материале. Сравнение показывает, что численное решение оказывается близким к точному, за исключением значений для безразмерной σ_{zz}. Несовпадение тем больше, чем ближе подходим к жесткой поверхности $\xi_0 = 0.2$. На том же рис. 3,a,b представлено развитие области вязкопластического течения при $\tau^* = 30$ и $\tau^* = 50$ соответственно. Очень часто [4–9] угловым ускорением при начале вращения пренебрегают, что делает задачу зависящей от одной переменной и приводит к значительным ее упрощениям. На рис. 3,a графиком предстает закон продвижения упруговязкопластической границы в двух случаях: при учете в расчетах изменяющегося углового ускорения $\dot{\psi}(\tau)$ (сплошная линия) и без такого учета (пунктирная). Учет в расчетах углового ускорения приводит не только к более быстрому возникновению области вязкопластического течения, но и появлению области обратимого деформирования в окрестности поверхности ξ_0. Однако такой эффект характерен только при быстром разгоне (например при $\tau^* = 30$, как на рис. 3,a); при $\tau^* = 50$ он уже не проявляется (рис. 3,b).

Изменение безразмерного Σ при разгоне вращения графически показано на рис. 3,c. В качестве времени данного разгонного участка принято $\tau^* = 30$. Заштрихованные области – области где происходит вязкопластическое течение материала. $\psi_{\max}$ в (4.4) выбрано $\psi_{\max} = \psi_{fp}$, что обеспечивает распространение вязкопластического течения на всю деформируемую часть цилиндра $0.2 \leq \xi \leq 1$.

7. Заключение. В отличие от большинства публикаций [4–9] где на разгонном участке вращения дисков и цилиндров пренебрегается угловым ускорением, считая, что угловая скорость меняется достаточно медленно, здесь рассмотрен именно быстрый разгон вращения. В некоторых случаях приводится сравнение со случаем медленного разгона и указываются качественные отличия в процессе деформирования, вызываемые быстрым изменением угловой скорости вращения. Необходимо отметить работу [10], где также учитывались окружные силы инерции, определяемые угловым ускорением, но в иной постановке.

Основным средством тестирования программ расчетов являются точные решения упругой задачи, задающие изменения напряжений и деформаций на начальной стадии процесса, и, что более важно, точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении. В последнем случае весь деформируемый материал подвержен вязкопластическому течению в условии постоянства угловой скорости вращения.

Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 p.
2. *Nadai A.* Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw Hill, 1950. 572 p.
3. *Gamer U., Sayir M.* Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // ZAMP. 1984. V. 35. № 5. P. 601–617.
https://doi.org/10.1007/BF00952107
4. *Mack W.* The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. 1991. № 12. P. 119–124.
5. *Mack W.* Rotating elastic-plastic tube with free ends // Int. J. Solids Struct. 1991. V. 27. № 11. P. 1461–1476.
https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E
6. *Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating* elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Int. J. Eng. Sci. 1997. V. 35. № 3. P. 253–267.
https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7
7. *Прокудин А.Н., Фирсов С.В.* Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. 2018. V. 18. № 2. P. 242–260.
8. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // ПММ. 2021. V. 85. № 2. P. 172–192.
https://doi.org/10.31857/S0032823521020077
9. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // ПМТФ. 2021. V. 62. № 5 (369). P. 68–79.
https://doi.org/10.15372/PMTF20210507
10. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N.* Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // Acta Mech. 2021. V. 232. № 5. P. 1917–1931.
https://doi.org/10.1007/s00707-021-02942-5
11. *Firsov S.V., Prokudin A.N., Burenin A.A.* Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion // J. Appl. Industr. Math. 2019. V. 13. № 4. P. 642–652.
https://doi.org/10.1134/S199047891904001X
12. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 p.
13. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1988. 208 p.
14. *Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В.* О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. P. 87–93.