

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

© 2023 г. А. А. Бобылев^{a,b,*}

^aМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bМосковский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.03.2022 г.

После доработки 22.03.2022 г.

Принята к публикации 23.03.2022 г.

Рассмотрены задачи дискретного контакта упругого слоя и жесткого штампа с заранее неизвестными площадками фактического контакта. Получена вариационная формулировка задач в виде граничного вариационного неравенства с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого слоя нормальные напряжения в нормальные перемещения. При аппроксимации этого оператора используется двумерное дискретное преобразование Фурье, для численной реализации которого применяются алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Приведена эквивалентная вариационному неравенству задача минимизации, в результате аппроксимации которой получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для численного решения этой задачи использован алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику множества ограничений. Построены двухпараметрические семейства прямоугольных в плане штампов с поверхностным рельефом. В результате вычислительных экспериментов установлено существование для каждого семейства штампов единой огибающей контактного давления, единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов. Форма и положение этих огибающих для семейства штампов зависят от параметров внешней нагрузки и отношения размеров номинальной области контакта к толщине слоя.

Ключевые слова: дискретный контакт, упругий слой, граничное вариационное неравенство, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S0572329922100129, EDN: DFNUIO

1. Введение. При контактном взаимодействии твердых тел область фактического контакта, как правило, дискретна. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик тел и их поверхностной микроструктуры. Для описания дискретного (множественного) контакта твердых тел предложены различные математические модели, учитывающие параметры макро- и микрогеометрии реальных поверхностей и условия их контактного взаимодействия [1–4]. Большинство этих моделей основано на классической теории контактного взаимодействия деформируемых тел [5, 6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного реше-

ния, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

В настоящей работе рассматриваются задачи дискретного контакта упругого однородного слоя, сцепленного с недеформируемым основанием, и жесткого штампа конечных размеров, основание которого имеет поверхностный рельеф. На части границы слоя, по которой возможен контакт со штампом, задаются условия одностороннего контакта, трение на площадках контакта отсутствует. Такая расчетная схема применяется при моделировании локального контактного взаимодействия твердых тел, одно из которых имеет мягкое покрытие, а другое – поверхностный микрорельеф. Отметим, что в рассматриваемых задачах дискретного контакта априори задается лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны и подлежат определению.

Задачи дискретного контакта с односторонними связями являются нелинейными вследствие наличия в постановке граничных условий в виде неравенств. Для их численного решения требуется применение итерационных алгоритмов. Наиболее распространенный подход к построению вычислительных алгоритмов решения контактных задач с односторонними связями состоит в использовании вариационных методов [8–10]. Вариационные формулировки также применяются для исследования проблемы существования, единственности и регулярности решения контактных задач [11–13].

Используя математический аппарат преобразования вариационных задач [8], можно получить семейство вариационных формулировок. С вычислительной точки зрения наиболее эффективным является применение граничных вариационных формулировок с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого тела, по которой возможен контакт, поверхностные силы в перемещения поверхности. В этом случае для дискретизации контактной задачи применяется метод граничных элементов, причем дискретизации подлежат не вся граница упругого тела, а лишь ее часть – область возможного контакта.

Для построения оператора Пуанкаре–Стеклова требуется решить линейную краевую задачу с заданными силами на поверхности возможного контакта. Как известно [14], при решении краевых задач для упругого слоя может быть эффективно использовано двумерное интегральное преобразование Фурье. В ряде случаев удается получить аналитические выражения для трансформант Фурье искомым функций, однако выполнить аналитически обратное преобразование Фурье этих двумерных трансформант весьма затруднительно, поэтому используют приближенные методы. Асимптотические методы представлены в монографиях [15, 16]. Численные методы, как правило, основаны на двумерном дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), при реализации которого применяются алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) [17, 18]. Подробный обзор современного состояния исследований и анализ различных аспектов применения ДПФ и БПФ в контактных задачах приведен в [19, 20].

В результате аппроксимации граничных вариационных формулировок контактных задач с односторонними связями методом граничных элементов получают задачи квадратичного программирования, для решения которых в настоящее время наиболее эффективными считаются алгоритмы, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (МСГ).

Впервые алгоритм решения задач квадратичного программирования на основе МСГ был предложен в работе [21]. Идея алгоритма состояла в использовании стратегии рабочего списка активных ограничений-неравенств (активного набора) и применении МСГ для нахождения минимума на текущем рабочем подпространстве. Была доказана теоретическая сходимость алгоритма за конечное число шагов. При практическом использовании алгоритма оказалось, что скорость сходимости итерационного

процесса существенно зависит от количества и вида ограничений. Поэтому впоследствии были предложены различные модификации базового алгоритма, адаптированные для решения конкретных классов прикладных задач. Описание и анализ алгоритмов на основе МСГ для решения контактных задач с односторонними связями можно найти, например, в работах [22, 23].

Один из наиболее известных алгоритмов, приведенный в часто цитируемой статье [24], отличается от базового алгоритма [21] учетом специфики множества ограничений решаемой задачи квадратичного программирования, что позволило значительно повысить скорость работы алгоритма. Однако алгоритм [24] имеет существенное ограничение. В нем учитывается только одно уравнение равновесия штампа (для сил) и, следовательно, только поступательное движение штампа. Это не позволяет использовать алгоритм для решения контактных задач при внецентренном нагружении штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

В [25] автором предложен новый алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полуплоскости, разработанный на основе МСГ. Основная идея этого алгоритма состоит в применении линейного преобразования переменных, позволяющего свести ограничения в виде равенств, которые аппроксимируют уравнения равновесия штампа и содержат все переменные задачи, к простым ограничениям, содержащим только одну переменную. Такие ограничения несложно учесть в алгоритме МСГ. Этот прием позволяет рассматривать оба уравнения равновесия штампа и задавать значение момента внешних сил. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили вычислительную эффективность разработанного алгоритма.

В настоящей работе алгоритм [25] обобщен для пространственных контактных задач. Предложено линейное преобразование переменных, позволяющее учесть все три уравнения равновесия штампа и рассматривать случаи внецентренного нагружения штампа в пространственных контактных задачах для упругого слоя. Отметим также, что в отличие от работы [25] при аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова используется ДПФ, для численной реализации которого применяются алгоритмы БПФ. Это позволило существенно сократить вычислительные затраты при решении пространственных контактных задач.

В [25] построено однопараметрическое семейство штампов с поверхностным рельефом, для которого в результате вычислительных экспериментов установлено, что при вдавливании штампов в упругую полуплоскость существует единая огибающая контактного давления – кривая, проходящая через локальные максимумы контактного давления на отдельных пятнах контакта. Положение огибающей для семейства штампов зависит от параметров внешней нагрузки. В настоящей работе этот результат обобщен для пространственной контактной задачи – построено двухпараметрическое семейство штампов с поверхностным рельефом, при вдавливании которых в упругий слой существует единая огибающая контактного давления. Кроме того, в результате вычислительных экспериментов установлено существование для семейства штампов единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов.

2. Постановка задачи. Пусть в неподвижной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ невесомый однородный изотропный упругий слой занимает область $\Omega = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq \infty, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h \}$. Границу слоя $x_3 \equiv 0$ будем обозначать Γ_0 , а границу $x_3 \equiv h$ – через Γ_1 . Далее под $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформаций и напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Предполагается, что деформации малы, а напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние слоя описывается системой уравнений [14, 15]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega \quad (2.1)$$

где $\text{def} \equiv 1/2(\text{grad} + \text{grad}^T)$, \mathbf{S} – тензор модулей упругости.

По границе Γ_0 слой соединен с недеформируемым основанием. В случае идеально-го контакта граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma_0 \quad (2.2)$$

В слой вдавливаются гладкий жесткий штамп, основание которого имеет поверхностный рельеф. Часть границы Γ_1 , по которой возможен контакт слоя со штампом, обозначается Γ_p . Положение и предельные размеры Γ_p , т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Без потери общности будем полагать, что область Γ_p представляет собой прямоугольник размеров $b_1 \times b_2$ со сторонами, параллельными осям координат Ox_1 и Ox_2 соответственно. Отметим, что при вдавливании штампа с поверхностным рельефом номинальная область контакта Γ_p включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

Макроформа основания штампа и его поверхностный рельеф описываются функцией $\Phi(x_1, x_2)$, значение которой в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к границе Γ_p . Расстояние $\Phi(x_1, x_2)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию слоя. Для определенности будем полагать $\min_{\mathbf{x} \in \Gamma_p} \Phi(x_1, x_2) = 0$. Для штампа с поверхностным рельефом функция $\Phi(x_1, x_2)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется векторами перемещений $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и углов поворота $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Главный вектор $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ и главный момент $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается точка $\mathbf{x}^c = (x_1^c, x_2^c, x_3^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта слоя со штампом, поэтому будем полагать $F_1 = F_2 = 0$, $M_3 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\varphi_3 = 0$.

Контактное взаимодействие упругого слоя с жестким штампом описывается условиями одностороннего гладкого контакта:

$$u_3 \leq \Phi + \delta_3 + \varphi_1(x_2 - x_2^c) - \varphi_2(x_1 - x_1^c), \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$$

$$\sigma_{33}[u_3 - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c)] = 0 \quad \text{на } \Gamma_p \quad (2.3)$$

Остальная часть границы Γ_1 свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \Gamma_p \quad (2.4)$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_{33} d\Gamma_p = F_3, \quad \int_{\Gamma_p} \sigma_{33}(x_2 - x_2^c) d\Gamma_p = M_1, \quad \int_{\Gamma_p} \sigma_{33}(x_1 - x_1^c) d\Gamma_p = -M_2 \quad (2.5)$$

Отметим, что соотношения (2.5), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, удовлетворяют следующим условиям:

– компонента главного вектора F_3 ограничена по абсолютной величине и $F_3 < 0$;

– значения силы F_3 и моментов M_1 и M_2 согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{33} \leq 0$ на Γ_p , удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (2.5).

Для замыкания постановки контактной задачи необходимо задать условия на бесконечности. Обычно в качестве таковых используются условия, характеризующие определенный порядок изменения перемещений и напряжений на бесконечности. Как правило, эти условия носят чисто математический характер. Более естественным является условие конечности потенциальной энергии деформации упругого слоя

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega < \infty \quad (2.6)$$

которое вполне замыкает постановку задачи и определяет поведение решения на бесконечности [15].

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих уравнениям (2.1), граничным условиям (2.2)–(2.4), уравнениям равновесия штампа (2.5) и условию (2.6). Также необходимо найти смещение δ_3 и повороты φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче дискретного контакта априори задается лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта Γ_p , положение и форма пятен фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению.

Отметим, что более общие постановки задач дискретного контакта для упругого слоя с заданными массовыми силами и неоднородными смешанными граничными условиями на $\Gamma_1 \setminus \Gamma_p$ можно рассматривать как контактные задачи при наличии пригрузки вне штампа [1, 5]. Следуя общему подходу, несложно показать, что эти задачи могут быть сведены к рассматриваемой путем модификации функции, описывающей форму основания штампа

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \tilde{u}_3 \quad (2.7)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ – решение краевой задачи для упругого слоя с заданными массовыми силами и неоднородными смешанными граничными условиями на $\Gamma_1 \setminus \Gamma_p$ при отсутствии штампа, т.е. когда

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_p \quad (2.8)$$

3. Функциональные пространства. Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ задачи (2.1)–(2.6), принадлежащее классу функций $[C^2(\Omega)]^3 \cap [C^1(\bar{\Omega})]^3$, является классическим решением. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет определить обобщенное решение. Введем необходимые для этого функциональные пространства [15, 26, 27]. Обозначим

$$\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)\} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^3$, $\mathbf{L}_2(\Omega) = [L_2(\Omega)]^3$ – прямые произведения пространств Соболева. Пространство $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + (\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}), \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}))_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \quad (3.2)$$

Для однородного изотропного упругого слоя несложно получить неравенство

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \leq c_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega) \quad (3.3)$$

с положительной постоянной c_1 , не зависящей от \mathbf{v} . Следовательно, элементы пространства $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)$ удовлетворяют условию конечности потенциальной энергии деформации (2.6).

Выделим в $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)$ подпространство

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega) : \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ в } \Omega; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_0\} \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.5)$$

Из результатов [11] с учетом (3.5) следует, что существует постоянная $c_2 > 0$, зависящая лишь от Ω , такая, что

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \geq c_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.6)$$

Неравенство (3.6) представляет собой первое неравенство Корна.

Используя далее результаты [15, 28], можно показать, что существуют линейные непрерывные операторы следа

$$\boldsymbol{\gamma}_u : \mathbf{V} \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_1)]^3, \quad \boldsymbol{\gamma}_t : \mathbf{V} \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3 \quad (3.7)$$

определяющие для полей перемещений $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ соответственно векторные функции перемещений $\boldsymbol{\gamma}_u \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и напряжений $\boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{v} = (\boldsymbol{\sigma}_{31}, \boldsymbol{\sigma}_{32}, \boldsymbol{\sigma}_{33})$ на Γ_1 такие, что

$$\|\boldsymbol{\gamma}_u \mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma_1)]^3} \leq c_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}, \quad \|\boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{v}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3} \leq c_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} \quad (3.8)$$

где c_3, c_4 – положительные постоянные, не зависящие от \mathbf{v} .

Обратно, существует линейный непрерывный оператор

$$\boldsymbol{\tau}_t : [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3 \rightarrow \mathbf{V} \quad (3.9)$$

такой, что для заданного $\mathbf{t} \in [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^3$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, обладающую свойством $\boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{v} = \mathbf{t}$.

Введем пространство сужений на Γ_p функций из $H^{1/2}(\Gamma_1)$

$$H^{1/2}(\Gamma_p) = \{v = w|_{\Gamma_p} : w \in H^{1/2}(\Gamma_1)\} \quad (3.10)$$

и оснастим его нормой

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)} = \inf_{w \in H^{1/2}(\Gamma_1)} \{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} : v = w|_{\Gamma_p}\} \quad (3.11)$$

Имеет место вложение пространств $H^{1/2}(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p)$ [29]. Двойственным к пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$ является пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ – пополнение $L_2(\Gamma_p)$ по норме

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \sup_{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)}=1} |(p, v)_{L_2(\Gamma_p)}| \quad (3.12)$$

т.е. отношение двойственности $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)}$ порождается продолжением стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_p)$ и имеет место плотное вложение пространств [29]

$$L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \quad (3.13)$$

Для упрощения обозначений указанное отношение двойственности далее будем обозначать как $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Заметим, что тривиальное продолжение функции $p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ на Γ_1 принадлежит пространству $H^{-1/2}(\Gamma_1)$, т.е. существует функция $p^* \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ такая, что $\text{supp } p^* \subset \bar{\Gamma}_p$, p является сужением p^* на Γ_p и выполняется равенство [28]

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \|p^*\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \quad (3.14)$$

Следовательно, с учетом (3.9) существует линейный непрерывный оператор

$$\tau_p : [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)]^3 \rightarrow \mathbf{V} \quad (3.15)$$

такой, что для заданного $\mathbf{p} \in [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)]^3$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, обладающую свойством $\gamma_t \mathbf{v}|_{\Gamma_p} = \mathbf{p}$.

4. Интегральное представление решения. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для упругого слоя: найти поле перемещений \mathbf{u} , удовлетворяющее уравнениям (2.1), граничным условиям (2.2) и (2.4), а также условиям

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = q \quad \text{на } \Gamma_p \quad (4.1)$$

В [15] показано, что для любого $q \in L_2(\Gamma_p)$ данная задача имеет единственное решение \mathbf{u} и выполняется интегральное тождество (обобщенная формула Грина)

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_p} q v_3 d\Gamma_p \quad \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{V} \quad (4.2)$$

Из (4.2) с учетом (3.6) следует оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)} \leq c_5 \|q\|_{L_2(\Gamma_p)} \quad (4.3)$$

с положительной постоянной c_5 , не зависящей от q . Следовательно, с помощью решения вспомогательной краевой задачи можно определить линейный непрерывный оператор $\mathbf{G}_p : q \mapsto \mathbf{u}$ из $L_2(\Gamma_p)$ в \mathbf{V} .

Решение вспомогательной краевой задачи для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид [16]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\alpha, \beta, x_3) \mathcal{Q}(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x_1 + \beta x_2)] d\alpha d\beta \quad (4.4)$$

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_p} q(x_1, x_2) \exp[i(\alpha x_1 + \beta x_2)] dx_1 dx_2 \quad (4.5)$$

Выражение для ядра $\mathbf{U}(\alpha, \beta, x_3)$ приведено, например, в [16]. Учитывая плотность вложения (3.13), оператор \mathbf{G}_p можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (3.15) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в \mathbf{V} .

Таким образом, использование интегрального представления (4.4)–(4.5) в предположении, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$, позволяет свести решение контактной задачи (2.1)–(2.6) к нахождению нормальных напряжений $\sigma_{33} = q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \leq 0 \quad \text{на } \Gamma_p \quad (\text{в смысле } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)) \quad (4.6)$$

$$u_3(q) \leq \Phi + \delta_3 + \varphi_1(x_2 - x_2^c) - \varphi_2(x_1 - x_1^c) \quad \text{на } \Gamma_p \quad (\text{в смысле } H^{1/2}(\Gamma_p)) \quad (4.7)$$

$$q[u_3(q) - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c)] = 0 \text{ на } \Gamma_p \text{ (в смысле } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)) \quad (4.8)$$

$$\langle q, 1 \rangle = F_3, \quad \langle q, x_2 - x_2^c \rangle = M_1, \quad \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = -M_2 \quad (4.9)$$

Перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{G}_p q$, соответствующие решению $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ системы (4.6)–(4.9), будем называть обобщенным решением контактной задачи (2.1)–(2.6).

5. Оператор Пуанкаре–Стеклова. Введем оператор Пуанкаре–Стеклова $G_s : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (4.4)–(4.5) нормальные напряжения $q(x_1, x_2) \equiv \equiv \sigma_{33}(x_1, x_2, h)$ на части Γ_p границы упругого слоя в нормальные перемещения $w(x_1, x_2) \equiv \equiv u_2(x_1, x_2, h)$ на Γ_p .

Соответствующее решению (4.4)–(4.5) выражение для оператора Пуанкаре–Стеклова $G_s : q \mapsto w$ для $p \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид [16]:

$$w(x_1, x_2) = \int_{\Gamma_p} K_s(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.1)$$

Отметим, что ядро $K_s(\cdot, \cdot)$ интегрального представления (5.1) является разностным по обоим аргументам [16]. Учитывая плотность вложения (3.13), оператор G_s можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (3.7), (3.10), (3.15) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ непрерывную билинейную форму

$$g(p, q) = \langle p, G_s q \rangle \quad (5.2)$$

Учитывая плотность вложения (3.17), из (4.2) получим, что

$$g(p, q) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (5.3)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{G}_p q$, $\mathbf{v} = \mathbf{G}_p p$.

Для изотропного упругого слоя билинейная форма $g(\cdot, \cdot)$ является симметричной. Используя (3.6), далее получим неравенство

$$g(q, q) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \geq c_0 \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \geq c_0 c_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega)}^2 \quad (5.4)$$

из которого с учетом (3.8) и (3.14) следует оценка

$$g(q, q) \geq c_6 \|q\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)}^2 \quad (5.5)$$

с положительной постоянной c_6 , не зависящей от q . В результате, билинейная форма $g(\cdot, \cdot)$ и оператор Пуанкаре–Стеклова G_s являются положительно определенными на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

6. Вариационная формулировка задачи. Для решения системы (4.6)–(4.9), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [8–13]. Образует множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$\Sigma = \left\{ p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) : p \leq 0; \langle p, 1 \rangle = F_3; \langle q, x_2 - x_2^c \rangle = M_1; \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = -M_2 \right\} \quad (6.1)$$

Нетрудно видеть, что множество Σ является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Пусть $q \in \Sigma$ – решение системы (4.6)–(4.9). Тогда для произвольного $p \in \Sigma$ получим следующую оценку

$$\begin{aligned}
 \langle p - q, G_s q - \Phi \rangle &= \langle p - q, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle + \\
 &\quad + \langle p - q, \delta_3 + \varphi_1(x_2 - x_2^c) - \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle = \\
 &= \langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle - \\
 &\quad - \langle q, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle + \\
 &\quad + \delta_3 \langle p, 1 \rangle + \varphi_1 \langle p, x_2 - x_2^c \rangle - \varphi_2 \langle p, x_1 - x_1^c \rangle - \delta_3 \langle q, 1 \rangle - \varphi_1 \langle q, x_2 - x_2^c \rangle + \\
 &\quad + \varphi_2 \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = \langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - \varphi_1(x_2 - x_2^c) + \varphi_2(x_1 - x_1^c) \rangle \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Из (6.2) следует, что искомые нормальные напряжения $q \in \Sigma$ удовлетворяют граничному вариационному неравенству

$$g(p - q, q) - \phi(p - q) \geq 0 \quad \forall p \in \Sigma \tag{6.3}$$

где $\phi(\cdot)$ – определенная на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ линейная форма

$$\phi(p) = \langle p, \Phi \rangle \tag{6.4}$$

Отметим, что неравенство (6.3) не содержит неизвестных смещения δ_3 и поворотов φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Как нетрудно видеть из преобразований (6.2), это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений Σ удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (4.9).

Используя известные приемы [30, 31], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (6.3) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (4.6)–(4.9).

Учитывая, что билинейная форма $g(p, q)$ является положительно определенной, а множество Σ – непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (6.3) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in \Sigma$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p \in \Sigma} \left\{ J(p) = \frac{1}{2} g(p, p) - \phi(p) \right\} \tag{6.5}$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (6.3) и задачи минимизации (6.5) существует и единственно [8, 12, 13].

Отыскав нормальные напряжения $q \equiv \sigma_{33}$ на Γ_p как решение задачи (6.5), можно определить напряженно-деформированное состояние всего слоя, используя (4.4)–(4.5).

7. Аппроксимация задачи. Выбор метода аппроксимации задачи минимизации (6.5) определяется, в первую очередь, возможностью построения эффективной с вычислительной точки зрения аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова G_s , ядро интегрального представления (5.1) которого имеет вид [16]

$$K_s(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{K}_s(\alpha, \beta) \cos \alpha z_1 \cos \beta z_2 d\alpha d\beta \tag{7.1}$$

где

$$\tilde{K}_s(\alpha, \beta) = S_s(h(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}), \quad S_s(t) = \frac{2(1 - \nu^2)h}{Et} \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2t - 4t}{2\kappa \operatorname{ch} 2t + \kappa^2 + 1 + 4t^2}, \quad (7.2)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu$$

Аналитическое выражение для интеграла (7.1) неизвестно. Применение кубатурных формул для вычисления этого несобственного двойного интеграла представляет собой трудоемкую вычислительную задачу. Альтернативный подход состоит в следующем. Нетрудно видеть, что $\tilde{K}_s(\alpha, \beta)$ является двумерной косинус-трансформантой Фурье функции $K_s(z_1, z_2)$. Подвергнем (5.1) двумерному преобразованию Фурье и в соответствии с теоремой о свертке [32] получим

$$\tilde{w}(\alpha, \beta) = \tilde{K}_s(\alpha, \beta) \tilde{q}(\alpha, \beta) \quad (7.3)$$

где $\tilde{w}(\alpha, \beta)$, $\tilde{q}(\alpha, \beta)$ – двумерные трансформанты Фурье соответственно нормальных перемещений $w(x_1, x_2)$ на Γ_1 и тривиального продолжения на Γ_1 нормальных напряжений $q(x_1, x_2)$. Следовательно, вычисление оператора Пуанкаре–Стеклова G_s сводится к выполнению пары (прямого и обратного) двумерных преобразований Фурье и перемножению спектров (7.3).

В численном анализе использование преобразования Фурье наиболее эффективно в случае периодических функций благодаря дискретности их спектра и, как следствие, переходе от непрерывного преобразования к дискретному [17, 18]. Поэтому основная идея используемого ниже подхода состоит в аппроксимации искомым нормальных напряжений на Γ_p сеточными функциями, периодическими на всей границе Γ_1 , и применении алгоритмов БПФ. Для уменьшения возникающей при этом так называемой ошибки периодичности вводится расширенная вычислительная область Γ_c [19, 20].

Выберем прямоугольную вычислительную область $\Gamma_c \subset \Gamma_1$ размеров $a_1 \times a_2$ со сторонами, параллельными осям координат Ox_1 и Ox_2 , так, чтобы выполнялись условия

$$\Gamma_p \subset \Gamma_c, \quad a_i = \chi_i b_i, \quad \chi_i \in \mathbb{N}, \quad \chi_i > 1, \quad i = 1, 2 \quad (7.4)$$

где χ_i – коэффициенты расширения вычислительной области. Далее аналогично (3.10)–(3.12) введем пространство $H^{1/2}(\Gamma_c)$ и двойственное ему пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Используя результаты [29], можно показать, что сужения функций из $H^{1/2}(\Gamma_c)$ на Γ_p принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$, а тривиальное продолжение q_0 функции $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ на Γ_c принадлежит пространству $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Обозначим через $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ подпространство функций из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$, имеющих носитель на $\bar{\Gamma}_p$. Учитывая (7.4), аналогично [33] продолжим периодически функции из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ на всю границу Γ_1 с периодом Γ_c и образуем пространство $\hat{H}_{per}^{-1/2}(\Gamma_1)$ Γ_c -периодических функций. Далее функции из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ будем отождествлять с их периодическими продолжениями на Γ_1 . Тем самым определим оператор $\Pi : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \rightarrow \hat{H}_{per}^{-1/2}(\Gamma_1)$, ставящий в соответствие функции из $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ периодическое продолжение $q_{per} \in \hat{H}_{per}^{-1/2}(\Gamma_1)$ на Γ_1 ее тривиального продолжения $q_0 \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ на Γ_c .

Обозначим через $\hat{L}_2(\Gamma_c)$ подпространство функций из $L_2(\Gamma_c)$, имеющих носитель на $\bar{\Gamma}_p$. Используя (3.13), можно показать, что имеет место плотное вложение пространств $\hat{L}_2(\Gamma_c) \subset \hat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Функции из $\hat{L}_2(\Gamma_c)$ можно рассматривать как Γ_c -периодические,

следовательно система функций $\exp[2\pi i(l_1 x_1/a_1 + l_2 x_2/a_2)]$, $l_1, l_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, является плотной в $\widehat{L}_2(\Gamma_c)$ [34]. Поэтому $q \in \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ можно аппроксимировать с заданной точностью конечным отрезком ряда Фурье

$$q_f = \sum_{|l_1| \leq L_1} \sum_{|l_2| \leq L_2} c[l_1, l_2] \exp[2\pi i(l_1 x_1/a_1 + l_2 x_2/a_2)] \quad (7.5)$$

Для вычисления коэффициентов Фурье $c[l_1, l_2] \in \mathbb{Z}$ с помощью ДПФ введем сеточные функции. Построим на Γ_c регулярную (равномерную) сетку Υ_c , состоящую из $N_c = N_{c1} \cdot N_{c2}$ одноузловых прямоугольных граничных элементов нулевого порядка размеров $d_1 \times d_2$, где $d_i = a_i/N_{ci}$, $i = 1, 2$. Узлы Υ_c обозначим s_{nm} , $n = \overline{1, N_{c1}}$, $m = \overline{1, N_{c2}}$. Часть Υ_c , расположенную на Γ_p и содержащую $N = N_{p1} \cdot N_{p2}$ элементов, обозначим Υ_p . Из (7.4) следует, что $N_{pi} = N_{ci}/\chi_i$, $i = 1, 2$.

Далее векторы и матрицы будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы — соответствующими малыми латинскими буквами.

Введем на Υ_c сеточные функции (матрицы) нормальных напряжений и перемещений

$$\mathbf{Q}_c = [q_{nm}], \quad \mathbf{W}_c = [w_{nm}], \quad n = \overline{1, N_{c1}}, \quad m = \overline{1, N_{c2}} \quad (7.6)$$

и соответствующие им векторы

$$\mathbf{Q}_{cv} = \mathbf{vec}(\mathbf{Q}_c), \quad \mathbf{W}_{cv} = \mathbf{vec}(\mathbf{W}_c) \quad (7.7)$$

где $\mathbf{vec}(\cdot)$ — оператор векторизации матрицы, преобразующий ее в вектор путем расположения ее столбцов друг под другом.

Введем также редукции сеточных функций на Υ_p

$$\mathbf{Q}_{pv} = \mathbf{R}_{pc} \mathbf{Q}_{cv}, \quad \mathbf{W}_{pv} = \mathbf{R}_{pc} \mathbf{W}_{cv} \quad (7.8)$$

где \mathbf{R}_{pc} — прямоугольная матрица размеров $N \times N_c$, в каждой строке которой имеется ровно один ненулевой элемент, равный 1.

Обратные операции тривиального продолжения (дополнения нулевыми элементами) \mathbf{Q}_{pv} и \mathbf{W}_{pv} на Υ_c могут быть выполнены с помощью транспонированной матрицы \mathbf{R}_{pc}^T

$$\mathbf{Q}_{cv} = \mathbf{R}_{pc}^T \mathbf{Q}_{pv}, \quad \mathbf{W}_{cv} = \mathbf{R}_{pc}^T \mathbf{W}_{pv} \quad (7.9)$$

Известно [17, 18], что спектр сеточной функции является периодическим и представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра аппроксимируемой функции. Расстояние в частотной области между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации $\omega_0 = 2\pi/d$, где d — шаг сетки. Для исключения эффекта наложения частот и возможности восстановления периодической функции по ее сеточной аппроксимации будем полагать, что число гармоник в (7.5) и количество узлов сетки Υ_c удовлетворяют условиям

$$L_i < N_{ci}/2, \quad i = 1, 2 \quad (7.10)$$

вытекающим из теоремы Котельникова–Шеннона [17, 18].

Введем матрицы Фурье \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 порядков N_{c1} и N_{c2} соответственно

$$\mathbf{F}_1 = (N_{c1})^{-1/2} [f_{nm}], \quad f_{nm} = \omega_1^{(n-1)(m-1)}, \quad \omega_1 = \exp(-2\pi i/N_{c1}) \quad (7.11)$$

$$\mathbf{F}_2 = (N_{c2})^{-1/2} [f_{nm}], \quad f_{nm} = \omega_2^{(n-1)(m-1)}, \quad \omega_2 = \exp(-2\pi i/N_{c2}) \quad (7.12)$$

Матрицы Фурье обратимы и при этом обратные матрицы имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1} = \mathbf{F}_1^*, \quad \mathbf{F}_2^{-1} = \mathbf{F}_2^* \quad (7.13)$$

где \mathbf{F}_1^* , \mathbf{F}_2^* – эрмитово сопряженные матрицы.

Используя матрицы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , вычислим образы Фурье $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ сеточных функций нормальных напряжений и перемещений

$$\tilde{\mathbf{Q}}_c = \mathbf{F}_2 \mathbf{Q}_c \mathbf{F}_1, \quad \tilde{\mathbf{W}}_c = \mathbf{F}_2 \mathbf{W}_c \mathbf{F}_1 \quad (7.14)$$

Для соответствующих матрицам \mathbf{Q}_c и \mathbf{W}_c векторов формулы (7.14) примут вид

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{cv} = (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1) \mathbf{Q}_{cv}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_{cv} = (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1) \mathbf{W}_{cv} \quad (7.15)$$

где символом \otimes обозначено кронекерово произведение матриц \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_1 .

Сеточные функции \mathbf{Q}_c и \mathbf{W}_c являются вещественными, поэтому из свойств двумерного ДПФ [17, 18] следует, что элементы матриц $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ удовлетворяют для $n_1 = \overline{2, N_{c1}}$ и $n_2 = \overline{2, N_{c2}}$ условиям

$$\begin{aligned} \tilde{q}(n_1, n_2) &= \tilde{q}^*(N_{c1} - n_1 + 2, N_{c2} - n_2 + 2) \\ \tilde{w}(n_1, n_2) &= \tilde{w}^*(N_{c1} - n_1 + 2, N_{c2} - n_2 + 2) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Для сеточных функций соотношение (7.3) примет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = \tilde{\mathbf{K}}_s \circ \tilde{\mathbf{Q}}_c \quad (7.17)$$

где символом \circ обозначено адамарово произведение матриц $\tilde{\mathbf{K}}_s$ и $\tilde{\mathbf{Q}}_c$.

Элементы матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_s$ с учетом (7.2) и (7.16) для индексов n_1 и n_2 из диапазонов $1 \leq n_1 \leq N_{c1}/2 + 1$ и $1 \leq n_2 \leq N_{c2}/2 + 1$ вычисляются по формуле

$$\tilde{k}(n_1, n_2) = S_s(2\pi h(((n_1 - 1)/a_1)^2 + ((n_2 - 1)/a_2)^2)^{1/2}) \quad (7.18)$$

Остальные элементы матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_s$ определяются с помощью равенств

$$\tilde{k}(n_1, n_2) = \tilde{k}(N_{c1} - n_1 + 2, N_{c2} - n_2 + 2), \quad n_1 = \overline{2, N_{c1}}, \quad n_2 = \overline{2, N_{c2}} \quad (7.19)$$

Несложно показать, что элемент

$$\tilde{k}(1, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} S_s(t) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)h}{(1 - \nu)E} \quad (7.20)$$

представляет собой коэффициент податливости рассматриваемого упругого слоя для случая приложения равномерной нормальной нагрузки по всей границе Γ_1 .

Из (7.7)–(7.9), (7.14)–(7.15) и (7.17) следует, что сеточная аппроксимация $\mathbf{G}_{sv} : \mathbf{Q}_{pv} \mapsto \mathbf{W}_{pv}$ оператора Пуанкаре–Стеклова G_s имеет вид

$$\mathbf{G}_{sv} = \mathbf{R}_{pc} (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1)^* \tilde{\mathbf{K}}_{sv} \circ (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1) \mathbf{R}_{pc}^T \quad (7.21)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}_{sv} = \mathbf{vec}(\tilde{\mathbf{K}}_s)$.

Учитывая, что все элементы $\tilde{\mathbf{K}}_{sv}$ положительны, можно показать, что \mathbf{G}_{sv} является симметричной положительно-определенной квадратной матрицей порядка N . При численной реализации формировать матрицу \mathbf{G}_{sv} в явном виде не требуется, достаточно лишь программно реализовать вычисление произведений каждой из матриц в правой части (7.21) на векторы. Учитывая, что матрицы \mathbf{R}_{pc} и \mathbf{R}_{pc}^T содержат только N ненулевых элементов, причем равных 1, вычисление произведений этих матриц на векторы сводится к выполнению N операций присваивания. Умножение на вектор $\tilde{\mathbf{K}}_{sv}$ требует выполнения N_c операций умножения. Для вычисления произведений мат-

риц $\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1$ и $(\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{F}_1)^*$ на векторы целесообразно использовать алгоритмы БПФ. Поэтому далее будем полагать $N_{c1} = 2^{n_1}$, $N_{c2} = 2^{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. В этом случае общее число операций для выполнения одного преобразования имеет порядок $O(N_c \log_2 N_c)$ [17, 18].

Далее для аппроксимации задачи (6.5) применим гранично-элементный подход [35–37]. Для вычисления билинейной $g(\cdot, \cdot)$ и линейной $\phi(\cdot)$ форм, определенных соответственно формулами (5.2) и (6.4), используем кубатурную формулу – прямое произведение квадратурных формул прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки Υ_p . Тем самым определяются аппроксимирующие билинейная $g_h(\cdot, \cdot)$ и линейная $\phi_h(\cdot)$ формы в пространстве \mathbb{R}^N

$$g_h(\mathbf{P}_{pv}, \mathbf{Q}_{pv}) = \mathbf{P}_{pv}^T \mathbf{G}_{sv} \mathbf{Q}_{pv} d_1 d_2, \quad \phi_h(\mathbf{P}_{pv}) = \mathbf{\Phi}_v^T \mathbf{P}_{pv} d_1 d_2 \quad (7.22)$$

где $\mathbf{\Phi}_v = \text{vec}(\mathbf{\Phi}) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{\Phi}$ – сеточная аппроксимация на Υ_p функции $\Phi(x_1, x_1)$, описывающей форму основания штампа.

При аппроксимации множества статически допустимых нормальных напряжений Σ , определенного формулой (6.1), применяется комбинированный подход. Для аппроксимации ограничений в виде неравенств используется коллокационный метод, а при аппроксимации ограничений в виде равенств – указанная выше кубатурная формула. В результате получается замкнутое выпуклое множество статически допустимых узловых нормальных напряжений

$$\Sigma_h = \left\{ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^N : q_n \leq 0, n \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}; \sum_{i=1}^N \lambda_i q_i = F_3; \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \vartheta_i q_i = M_1; \sum_{i=1}^N \theta_i q_i = -M_2 \right\} \quad (7.23)$$

Коэффициенты λ_i , ϑ_i и θ_i вычисляются по формулам

$$\lambda_i = d_1 d_2, \quad \vartheta_i = d_1 d_2 (x_2^i - x_2^c), \quad \theta_i = d_1 d_2 (x_1^i - x_1^c), \quad i \in I_N \quad (7.24)$$

где x_1^i, x_2^i – координаты i -го узла сетки Υ_p .

В результате для задачи минимизации (6.5) получим сеточную аппроксимацию – задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_{pv} \in \mathbb{R}^N$ такую, что

$$J_h(\mathbf{Q}_{pv}) = \min_{\mathbf{Q} \in \Sigma_h} \left\{ J_h(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{G}_{sv} \mathbf{Q} d_1 d_2 - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{Q} d_1 d_2 \right\} \quad (7.25)$$

Отметим, что размерность задачи (7.25) равна N – количеству узлов сетки Υ_p на Γ_p и не зависит от размера вычислительной области Γ_c , т.е. от выбора коэффициентов расширения вычислительной области χ_1 и χ_2 .

8. Решение задачи квадратичного программирования. Одна из сложностей, возникающих при численном решении задачи (7.25), состоит в наличии ограничений в виде равенств, содержащих все переменные задачи. Аналогично [25] для упрощения вида ограничений введем линейное преобразование переменных $\mathbf{Z} = \mathbf{CQ}$ такое, что

$$z_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i q_i, \quad z_m = \sum_{i=1}^N \vartheta_i q_i, \quad z_l = \sum_{i=1}^N \theta_i q_i, \quad I_1 = \{k, m, l\} \subset I_N \quad (8.1)$$

$$z_n = q_n, \quad n \in I_0 = I_N \setminus I_1 \quad (8.2)$$

Выбор индексов k , m и l в общем случае произволен при условии, что соответствующие компоненты вектора решения \mathbf{Q}_{pv} отличны от нуля, т.е. выполняются неравенства $q_k < 0$, $q_m < 0$ и $q_l < 0$. При решении конкретной задачи такие индексы (номера узлов) могут быть выбраны из априорных соображений. Корректность сделанного выбора проверяется путем апостериорного анализа полученного решения.

Нетрудно видеть, что матрица \mathbf{C} является невырожденной. Выражения для элементов матриц \mathbf{C}^{-1} и \mathbf{C}^{-T} несложно получить в явном виде, однако формировать матрицы в явном виде не требуется, достаточно лишь программно реализовать вычисление произведений этих матриц на векторы.

В результате преобразования переменных (8.1)–(8.2) получим эквивалентную (7.25) задачу квадратичного программирования: найти элемент $\mathbf{Z}_p \in V_z$ такой, что

$$J_z(\mathbf{Z}_p) = \min_{\mathbf{Z} \in V_z} \left\{ J_z(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{A}_z \mathbf{Z} - \mathbf{B}_z^T \mathbf{Z} \right\} \quad (8.3)$$

где

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{G}_{sv} \mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{B}_z = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{\Phi}_v \quad (8.4)$$

$$V_z = \left\{ \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^N : z_n \leq 0, n \in I_0; z_k = F_3, z_m = M_1, z_l = -M_3, k, m, l \in I_1 \right\} \quad (8.5)$$

Задача (8.3) является задачей квадратичного программирования с простыми ограничениями. Учитывая, что решение задачи (7.25) не зависит от значения множителя $d_1 d_2$ – площади граничного элемента, в (8.3) этот множитель опущен.

Из (8.4) следует, что матрицы \mathbf{G}_{sv} и \mathbf{A}_z подобны, поэтому матрица Гессе \mathbf{A}_z минимизируемой функции $J_z(\mathbf{Z})$ также является симметричной положительно-определенной матрицей.

Для численного решения задачи квадратичного программирования (8.3) в настоящей работе используется вариант МСГ, подробно рассмотренный в [25] при решении задач дискретного контакта для упругой полуплоскости.

9. Численные результаты. Разработанный вычислительный алгоритм реализован на языке FORTRAN с применением программного пакета для разработчиков NVIDIA HPC SDK. Для выполнения двумерных ДПФ использовалась библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах.

Для верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения проведено сравнение численных решений ряда задач дискретного контакта, в частности, рассмотренных ниже задач для штампов с регулярным поверхностным рельефом с решениями, полученными с помощью известного алгоритма [24]. Учитывая возможности последнего, при постановке контактных задач использовалось лишь первое из уравнений равновесия штампа (2.5) и полагалось $\varphi_1 = \varphi_1 = 0$. Проведенные расчеты показали, что среднеквадратичные относительные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений) не превышают 10^{-5} .

Кроме того, при тестировании разработанного алгоритма получены решения задач о вдавливании в упругий слой штампа, форма основания которого описывается функцией

$$\Phi(x_1, x_2) = \alpha_1 b_1 (x_1/b_1)^2 + \alpha_2 b_2 (x_2/b_2)^2 \quad (9.1)$$

где b_1, b_2 – размеры области контакта Γ_p , $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ – безразмерные параметры.

Несложно показать аналитически, что в случае нагружения такого штампа с эксцентриситетом $(e_1 b_1, e_2 b_2)$ относительно точки начального контакта $x_1 = x_2 = 0$ распределение нормальных напряжений будет соответствовать распределению при отсут-

ствии эксцентриситета, смещенному вдоль осей координат Ox_1 и Ox_2 соответственно на e_1b_1 и e_2b_2 , осадка штампа δ_3 уменьшится на $\alpha_1b_1e_1^2 + \alpha_2b_2e_2^2$, а сам штамп повернется на углы $\varphi_1 = -2\alpha_2e_2$ и $\varphi_2 = 2\alpha_1e_1$. Проведенные расчеты подтвердили эти выводы.

Далее приведен анализ результатов решения задач дискретного контакта, в которых область фактического контакта состояла из совокупности отдельных пятен контакта. Рассматривались задачи для гладких прямоугольных в плане штампов с регулярным поверхностным рельефом, состоящим из $K = K_1 \times K_2$ микровыступов. Номинальная область контакта полагалась равной $\Gamma_p = \{0 \leq x_1 \leq b_1, 0 \leq x_2 \leq b_2, x_3 = h\}$. Форма основания штампов задавалась функцией

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi^*(x_1, x_2) + \Psi_1(\xi_1)/K_1 + \Psi_2(\xi_2)/K_2 \quad (9.2)$$

где $\Phi^*(x_1, x_2)$ – выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Psi_1(\xi_1)$, $\Psi_2(\xi_2)$ – строго выпуклые функции, характеризующие форму микровыступов; $\xi_1 = \{K_1x_1/b_1\}$, $\xi_2 = \{K_2x_2/b_2\}$ – “быстрые” координаты, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Для заданной тройки функций $\Phi^*(x_1, x_2)$, $\Psi_1(\xi_1)$ и $\Psi_2(\xi_2)$ формула (9.2) определяет двухпараметрическое семейство штампов $\Xi(K_1, K_2)$, в качестве параметров которого выступают числа микровыступов K_1 и K_2 вдоль сторон штампа. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу $\Phi^*(x_1, x_2)$, а поперечные сечения их микровыступов, параллельные соответствующим координатным плоскостям, являются подобными.

Расчеты выполнялись для следующего семейства жестких штампов:

$$\Phi^*(x_1, x_2) = \alpha_1b_1(2x_1/b_1 - 1)^{m_1} + \alpha_2b_2(2x_2/b_2 - 1)^{m_2} \quad (9.3)$$

$$\Psi_1(\xi_1) = \beta_1b_1(2\xi_1 - 1)^{n_1}, \quad \Psi_2(\xi_2) = \beta_2b_2(2\xi_2 - 1)^{n_2} \quad (9.4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0$, $m_1, m_2, n_1, n_2 > 1$ – безразмерные параметры.

Компоненты главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_3 = -fb_1b_2E^*, \quad M_1 = e_2F_3b_2, \quad M_2 = -e_1F_3b_1 \quad (9.5)$$

где $E^* = E/(1 - \nu^2)$ – приведенный модуль упругости; $f > 0$ – безразмерный параметр; e_1, e_2 – безразмерные параметры, характеризующие эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $\mathbf{x}^c = (0.5b_1, 0.5b_2, h)$. При проведении расчетов значения параметров внешней нагрузки f , e_1 и e_2 выбирались таким образом, чтобы решение контактной задачи существовало и пятна контакта отдельных микровыступов оставались изолированными друг от друга.

Введем на множестве микровыступов сеточные координаты (i, j) , $i = \overline{1, K_1}$, $j = \overline{1, K_2}$, и обозначим через Γ_{ij} часть Γ_p , соответствующую микровыступу с координатами (i, j) . Отметим, что каждый штамп рассматриваемого семейства $\Xi(K_1, K_2)$ имеет свою собственную систему сеточных координат, определяемую параметрами K_1 и K_2 . Далее для каждого штампа введем следующие пары сеточные функций:

– значений $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ и координат $\mathbf{X}_p = [(x_1, x_2)_{ij}]$ максимумов контактного давления на микровыступах

$$p_{ij} = \max_{(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_{ij}} p(\xi_1, \xi_2), \quad (x_1, x_2)_{ij} = \arg \max_{(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_{ij}} p(\xi_1, \xi_2) \quad (9.6)$$

– нормализованных контактных усилий $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ и координат $\mathbf{X}_r = [(x_1, x_2)_{ij}]$ точек их приложения на микровыступах

$$r_{ij} = \frac{K_1 K_2}{|F_3|} \int_{\Gamma_{ij}} p d\xi_1 d\xi_2, \quad \int_{\Gamma_{ij}} p(\xi_1 - x_1) d\xi_1 d\xi_2 = 0, \quad \int_{\Gamma_{ij}} p(\xi_2 - x_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (9.7)$$

– относительных величин площадей $\mathbf{S} = [s_{ij}]$ и координат $\mathbf{X}_s = [(x_1, x_2)_{ij}]$ центров тяжести пятен фактического контакта на микровыступах

$$s_{ij} = \frac{1}{\text{meas } \Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} [p > 0] d\xi_1 d\xi_2, \quad \int_{\Gamma_{ij}} [p > 0](\xi_1 - x_1) d\xi_1 d\xi_2 = 0, \quad \int_{\Gamma_{ij}} [p > 0](\xi_2 - x_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (9.8)$$

где $[\cdot]$ – скобка Айверсона (функция равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае).

Для каждой пары функций $\{\mathbf{P}, \mathbf{X}_p\}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_r\}$ и $\{\mathbf{S}, \mathbf{X}_s\}$ с помощью некоторого оператора интерполяции построим на Γ_p непрерывные функции $p(x_1, x_2)$, $r(x_1, x_2)$ и $s(x_1, x_2)$, называемые далее соответственно огибающей контактного давления, огибающей нормализованных контактных усилий и огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов.

В результате обработки результатов многочисленных вычислительных экспериментов установлена следующая закономерность: если условия нагружения штампов таковы, что пятна контакта отдельных микровыступов остаются изолированными друг от друга, то для двухпараметрического семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$ существуют единая огибающая контактного давления $\tilde{p}(x_1, x_2)$, единая огибающая нормализованных контактных усилий $\tilde{r}(x_1, x_2)$ и единая огибающая относительных величин фактических площадей контакта $\tilde{s}(x_1, x_2)$ микровыступов, форма и положение которых зависят от параметров f , e_1 и e_2 внешней нагрузки, а также отношения размеров области контакта Γ_p к толщине упругого слоя h . В качестве $\tilde{p}(x_1, x_2)$, $\tilde{r}(x_1, x_2)$ и $\tilde{s}(x_1, x_2)$ можно выбирать соответственно огибающие $p(x_1, x_2)$, $r(x_1, x_2)$ и $s(x_1, x_2)$ для некоторого “базового” штампа рассматриваемого семейства $\Xi(K_1, K_2)$, например, штампа с наибольшим числом микровыступов $K = K_1 \cdot K_2$ в проведенной серии расчетов. Альтернативный подход к построению единых огибающих состоит в применении некоторой процедуры осреднения данных по всем штампам рассматриваемого семейства $\Xi(K_1, K_2)$.

В качестве примера в табл. 1 приведены среднеквадратичные относительные отклонения

$$\varepsilon_p = \|p - \tilde{p}\|_2 / \|\tilde{p}\|_2, \quad \varepsilon_r = \|r - \tilde{r}\|_2 / \|\tilde{r}\|_2, \quad \varepsilon_s = \|s - \tilde{s}\|_2 / \|\tilde{s}\|_2 \quad (9.9)$$

для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$ при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = 3 \times 10^{-5}$, $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-4}$, $m_1 = m_2 = 2$, $n_1 = n_2 = 4$, $b_1 = b_2 = b$. В качестве базового выбирался штамп со 128×128 микровыступами. Параметры внешней нагрузки в (9.5) полагались следующими: $f = 2 \times 10^{-5}$, $e_1 = 0.05$ и $e_2 = 0$. Толщина упругого слоя принималась равной $h = b/5$.

Сеточные нормы $\|\cdot\|_2$ в (9.9) вычислялись соответственно в узлах сеток \mathbf{X}_p , \mathbf{X}_r и \mathbf{X}_s для каждого штампа рассматриваемого семейства. Интерполяция функций $\tilde{p}(x_1, x_2)$, $\tilde{r}(x_1, x_2)$ и $\tilde{s}(x_1, x_2)$ производилась с помощью метода обратно взвешенных расстояний.

Таблица 1. Среднеквадратичные относительные отклонения ε_p , ε_r и ε_s для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$

$K_1 \times K_2$	ε_p	ε_r	ε_s
256 × 64	0.0099	0.0079	0.0220
256 × 32	0.0264	0.0095	0.0230
256 × 16	0.0334	0.0184	0.0377
256 × 8	0.0409	0.0337	0.0523
128 × 64	0.0051	0.0061	0.0149
128 × 32	0.0271	0.0094	0.0225
128 × 16	0.0359	0.0185	0.0369
128 × 8	0.0426	0.0338	0.0536
64 × 64	0.0060	0.0099	0.0140
64 × 32	0.0225	0.0116	0.0135
64 × 16	0.0308	0.0198	0.0285
64 × 8	0.0422	0.0359	0.0455
32 × 32	0.0323	0.0145	0.0217
32 × 16	0.0423	0.0216	0.0305
32 × 8	0.0453	0.0371	0.0358
16 × 16	0.0427	0.0269	0.0307
16 × 8	0.0285	0.0427	0.0539
8 × 8	0.0163	0.0556	0.0351

В табл. 2 приведены аналогичные данные для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$ при следующих значениях параметров: $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $e_1 = e_2 = 0.05$, $h = b/2$. Значения остальных параметров принимались такими же, как и для табл. 1.

Отметим, что при проведении расчетов необходимое количество $N = N_{p1} \cdot N_{p2}$ граничных элементов определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. При решении рассмотренных выше задач для штампов с регулярным поверхностным рельефом каждый микровыступ Γ_{ij} аппроксимировался сеткой из 64×64 граничных элементов. Наибольшее количество элементов сетки для базового штампа со 128×128 микровыступа-ми составляло $2^{26} = 67\,108\,864$ граничных элемента.

10. Заключение. Для решения задач дискретного контакта упругого слоя и жесткого штампа с заранее неизвестными площадками фактического контакта в настоящей работе применяется вариационный подход. Построено граничное вариационное неравенство с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого слоя нормальные напряжения в нормальные перемещения. Получена эквивалентная задача минимизации граничного функционала на множестве статически допустимых контактных напряжений.

Оператор Стеклова–Пуанкаре для упругого слоя строится с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье, поэтому при аппроксимации этого оператора используется двумерное ДПФ. Для численной реализации прямого и обратного ДПФ применяются алгоритмы БПФ.

Таблица 2. Среднеквадратичные относительные отклонения ε_p , ε_r и ε_s для семейства штампов $\Xi(K_1, K_2)$

$K_1 \times K_2$	ε_p	ε_r	ε_s
256 × 64	0.0284	0.0152	0.0233
256 × 32	0.0388	0.0181	0.0365
256 × 16	0.0524	0.0271	0.0535
256 × 8	0.0639	0.0349	0.0666
128 × 64	0.0151	0.0088	0.0149
128 × 32	0.0334	0.0145	0.0318
128 × 16	0.0496	0.0246	0.0500
128 × 8	0.0617	0.0319	0.0633
64 × 64	0.0089	0.0095	0.0086
64 × 32	0.0294	0.0134	0.0235
64 × 16	0.0456	0.0236	0.0423
64 × 8	0.0588	0.0318	0.0580
32 × 32	0.0336	0.0154	0.0226
32 × 16	0.0448	0.0246	0.0387
32 × 8	0.0500	0.0325	0.0523
16 × 16	0.0359	0.0270	0.0289
16 × 8	0.0410	0.0321	0.0360
8 × 8	0.0112	0.0396	0.0286

В результате аппроксимации вариационной формулировки с использованием гранично-элементного подхода получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для численного решения этой задачи использован алгоритм на основе МСГ [25], учитывающий специфику множества ограничений и позволяющий получать решения контактных задач для случаев внецентренного нагружения штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

Построены двухпараметрические семейства прямоугольных в плане штампов с поверхностным рельефом, в качестве параметров которого выступают числа микровыступов вдоль сторон штампа. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а поперечные сечения их микровыступов, параллельные соответствующим координатным плоскостям, являются подобными. В результате вычислительных экспериментов установлено существование для каждого семейства штампов единой огибающей контактного давления, единой огибающей нормализованных контактных усилий и единой огибающей относительных величин фактических площадей контакта микровыступов. Форма и положение этих огибающих для семейства штампов зависят от параметров внешней нагрузки и отношения размеров номинальной области контакта к толщине слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.

3. *Popov V.L.* Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. 362 p. = *Попов В.Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: Физматлит, 2013. 352 с.
4. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 452 p. = *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. P. 1441–1462. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080099>
8. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
9. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 518 p.
10. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
11. *Eck C., Jarušek J., Krbeč M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. New York: CRC Press, 2005. 398 p.
12. *Safonea M., Matei A.* Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. 280 p.
13. *Capatina A.* Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Cham: Springer, 2014. 235 p.
14. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
15. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
16. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Изд-во “Факториал”, 1998. 299 с.
17. *Brigham E.O.* The Fast Fourier Transform and Its Applications. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988. 448 p.
18. *Jain A.K.* Fundamentals of Digital Image Processing. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 569 p.
19. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
20. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X., Liu S., Zhu D.* FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics // *Front. Mech. Eng.* 2020. V. 6. № 61. P. 92–113. <https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00061>
21. *Поляк Б.Т.* Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // *Ж. выч. мат. мат. физ.* 1969. Т. 9. № 4. С. 807–821.
22. *Dostál Z.* Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities. New York: Springer, 2009. 284 p.
23. Scalable Algorithms for Contact Problems / Ed. by *Z. Dostál, T. Kozubek, M. Sadowská, V. Vondrák*. New York: Springer, 2016. 340 p.
24. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // *Wear*. 1999. V. 231. P. 206–219. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(99\)00113-1](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00113-1)
25. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 2. С. 154–172. <https://doi.org/10.31857/S0572329922020052>
26. *Lions J.L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. 360 p. = *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
27. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 357 p.
28. *Sauter S.A., Schwab C.* Boundary Element Methods. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. 652 p.
29. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 620 p.
30. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
31. *Khludnev A.M., Kovtunencko V.A.* Analysis of Cracks in Solids. Boston, Southampton: WIT-Press, 2000. 386 p.

-
32. *Sneddon I.N.* Fourier transforms. NY etc.: McGraw-Hill, 1951. 542 p. = *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 667 с.
 33. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 398 p. = *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
 34. *Serov V.* Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. Cham: Springer, 2017. 534 p.
 35. *Gwinner J., Stephan E.P.* Advanced Boundary Element Methods. Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems. Cham: Springer, 2018. 652 p.
 36. *Rjasanow S., Steinbach O.* The Fast Solution of Boundary Integral Equations. New York: Springer, 2007. 284 p.
 37. *Steinbach O.* Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements. New York: Springer, 2008. 386 p.