

УДК 531.15,517.977.55

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАЗГОН ИЛИ ТОРМОЖЕНИЕ МАССИВНЫХ МАХОВИКОВ НА ПРЕДЕЛЕ ПРОЧНОСТИ

© 2023 г. И. А. Бригаднов^{a,*}, В. В. Максаров^{a,**}, Ю. Олыт^{b,***}

^aСанкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

^bЭстонский университет естественных наук, Тарту, Эстония

*e-mail: brigadnov@mail.ru

**e-mail: maks78.54@mail.ru

***e-mail: jyri.olt@emu.ee

Поступила в редакцию 19.01.2022 г.

После доработки 26.04.2022 г.

Принята к публикации 29.06.2022 г.

В статье ставится и решается задача оптимального по быстродействию управления квазистатическим разгоном или торможением массивного маховика с учетом прочностных свойств материала. Исследуется зависимость оптимальных режимов от параметров, выявляются качественные особенности оптимальных режимов. Для дисковых и длинных цилиндрических маховиков строятся универсальные оптимальные режимы разгона или торможения, которые можно использовать при проектировании или эксплуатации инерционных накопителей энергии.

Ключевые слова: массивный маховик, инерционный накопитель энергии, предел упругости, оптимальное по быстродействию управление, классический и смешанный режимы управления

DOI: 10.31857/S0572329922100051, EDN: DFJQDR

Введение. В статье рассматриваются вопросы построения оптимальных по быстродействию режимов разгона или торможения массивных маховиков на пределе упругости. Как известно, маховик относится к числу перспективных типов накопителей механической энергии [1, 2]. Маховичные (супермаховичные) системы хранения энергии могут применяться для рекуперации энергии торможения на рельсовом транспорте с большой цикличностью движения, например, метропоездах или электричках. Экономия энергии в этих случаях достигает 50%. Кроме того, эти системы могут с успехом применяться на подъемных кранах или лифтах, при этом выигрыш в энергозатратах может достигать 90% и выше. Например, в Нидерландах введена в эксплуатацию инновационная гибридная система накопления энергии, состоящая из литий-ионных аккумуляторов производства швейцарской компании Leclanché и механических накопителей (маховиков) от голландского разработчика S4 Energy. Отмечается, что эффективность устройства достигает 92% (см. <https://energy.hse.ru/ac-senergy>).

К инерционным накопителям предъявляется ряд требований. Например, в настоящее время решена задача выбора оптимальной по энергоемкости конструкции дискового маховика-накопителя. Расчет профиля маховика основан на удовлетворении условию равнопрочности и заданной энергоемкости при вращении с постоянной угловой скоростью [1]. Часто применяемый приближенный учет процессов разгона или

торможения приводит к существенному завышению запаса прочности. В технике встречаются случаи кратковременного использования маховиков-накопителей. Основным требованием для них является минимальное время разгона или торможения при максимальном использовании прочностных свойств материала. Обычно решается близкая задача оптимизации работы электродвигателя с маховиком на валу [2]. Однако маховик рассматривается как твердое недеформируемое тело и, в результате, строятся режимы, далекие от оптимальных по быстродействию.

1. Постановка задачи. Рассмотрим маховик $\Omega \subset R^3$ кольцевого сечения с внутренним радиусом a и внешним радиусом b . Маховик изготовлен из однородного изотропного материала с параметрами: E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, σ_e – предел упругости (начало текучести). По внутренней поверхности маховик закреплен на жестком валу, который передает ему крутящий момент $M(t)$.

Возникающее угловое ускорение $\varepsilon(t)$ по закону Ньютона–Эйлера линейно связано с крутящим моментом $M(t)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{M(t)}{I}$$

где I – осевой момент инерции маховика. В результате вращения маховика как твердого тела появляется удельная объемная сила \mathbf{f} с компонентами в полярной системе координат (r, φ) :

$$f_r(r) = \omega^2 r, \quad f_\varphi(r) = \varepsilon r$$

где f_r и f_φ – радиальная и касательная (тангенциальная) составляющие силы \mathbf{f} соответственно; ω – угловая скорость, связанная с угловым ускорением естественным соотношением $\dot{\omega} = \varepsilon$. Здесь и далее точка сверху обозначает производную по времени. Под действием силы \mathbf{f} в диске возникают инерционные напряжения.

Рассматривается квазистатический режим разгона, т.е. возможные колебательные эффекты не учитываются, поэтому тензор истинных напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ удовлетворяет уравнению статического равновесия в каждой точке Ω :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

где ∇ – дифференциальный вектор-оператор Гамильтона, точка обозначает скалярное произведение в R^3 .

Деформации маховика предполагаются малыми, поэтому рассматривается линеаризованный тензор деформаций Коши

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения маховика относительно ведущего жесткого вала, верхний индекс T обозначает операцию транспонирования тензора второго ранга.

При разгоне на пределе упругости в каждой точке маховика должно выполняться, например, условие Мизеса [3–6]:

$$\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq 2\sigma_e^2$$

где две последовательные точки обозначают двойное скалярное произведение (скалярную свертку) тензоров второго ранга, верхний индекс D обозначает девиаторную (касательную) часть тензора истинных напряжений Коши.

В этом случае материал подчиняется закону Гука в форме двух линейных соотношений: гидростатическое давление пропорционально относительному изменению объема, а касательные напряжения пропорциональны сдвиговым деформациям

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{E}{1-2\nu} \text{tr}(\mathbf{E}), \quad \boldsymbol{\sigma}^D = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E}^D$$

где $\text{tr}(\bullet)$ след (первый инвариант) тензора второго ранга, в частности, $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ пропорционален гидростатическому давлению, а $\text{tr}(\mathbf{E})$ – относительное изменение объема.

Нас интересуют инерционные напряжения внутри маховика, возникающие под действием удельной объемной силы \mathbf{f} вследствие вращения маховика как твердого тела на жестком ведущем валу. Поэтому малые деформации Коши $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ порождаются малым перемещением \mathbf{u} маховика относительно вращающегося жесткого вала. Поскольку внутренняя поверхность маховика закреплена на жестком валу, а боковая поверхность является свободной, ставятся следующие краевые условия:

$$\mathbf{u}(a) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(b) = \mathbf{0}$$

где \mathbf{n} – нормаль к внешней поверхности маховика. Фактически это означает, что рассматривается краевая задача теории упругости во вращающейся системе координат, привязанной к жесткому ведущему валу.

В начальный момент $t = 0$ маховик находится в натуральном состоянии: $\boldsymbol{\sigma}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Исходная задача формулируется следующим образом. Требуется разогнать массивный маховик из состояния покоя ($\omega = 0, \varepsilon = 0$) до номинальной угловой скорости ($\omega = \omega_T, \varepsilon = 0$) за минимальное время так, чтобы процесс оставался квазистатическим и в любой момент выполнялось условие Мизеса. При торможении ставится обратная задача, а именно, требуется перевести маховик из состояния номинального вращения ($\omega = \omega_T, \varepsilon = 0$) в состояние покоя ($\omega = 0, \varepsilon = 0$) за минимальное время без колебаний и в упругом состоянии.

После решения краевой задачи теории упругости и подстановки полученных напряжений в условие Мизеса находится ограничение на величины ω и ε в виде неравенства $g(\omega, \varepsilon) \leq 0$, которое в силу выпуклости критерия Мизеса определяет выпуклое множество на фазовой плоскости (ω, ε) .

В силу гладкости критерия Мизеса функция $g(\omega, \varepsilon)$ также является гладкой и ее можно разрешить в первом квадранте фазовой плоскости $\{\omega \geq 0; \varepsilon \geq 0\}$ относительно ε

$$g(\omega, \varepsilon) \equiv \varepsilon - q(\omega) \leq 0$$

где функция $q(\omega)$ является вогнутой, гладкой и монотонно убывающей (рис. 1). В этом случае однозначно определяется предельно допустимая (максимальная) угловая скорость вращения маховика как корень уравнения $q(\omega_T^{\max}) = 0$.

Для реализации квазистатического разгона необходимо потребовать непрерывность, более того, кусочную гладкость функции $M(t)$, кусочную непрерывность и ограниченность ее производной $\dot{M}(t)$ на интервале $(0, T)$, а также $M(0) = 0$.

Введем в рассмотрение управление $e(t) = \dot{\varepsilon}(t) = \dot{M}(t)/I$. Тогда исходная задача может быть поставлена в стандартной форме как задача оптимального быстрогодействия линейной системы с линейным ограничением на управление и нелинейным ограничением на фазовые координаты 1-го рода [7, 8]. А именно, среди гладких функций $\omega(t)$, кусочно-гладких функций $\varepsilon(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $e(t)$, удовлетворяющих при $t \in (0, T)$:

- уравнениям движения

$$\dot{\omega} = \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = e \tag{1.1}$$

- ограничению на управление

$$|e| \leq V \tag{1.2}$$

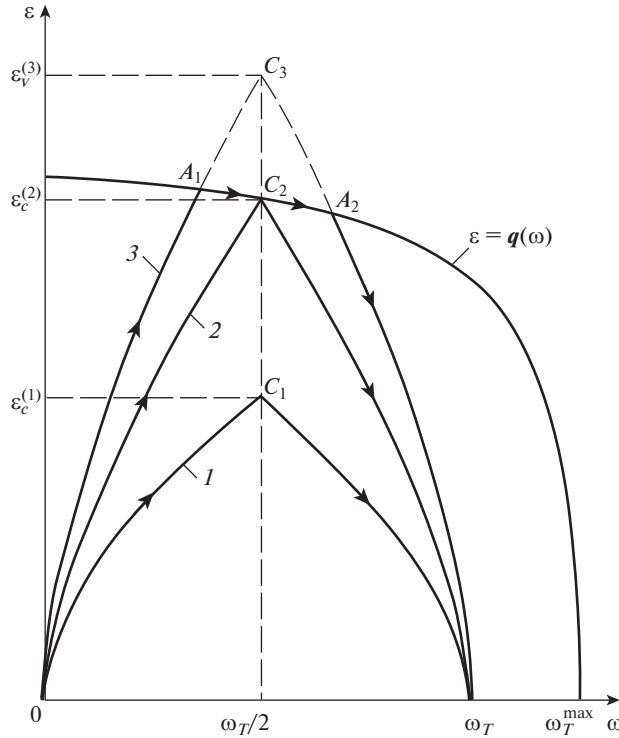


Рис. 1. Оптимальные режимы разгона: 1 – классический ($V < V^*$), 2 – предельный классический ($V = V^*$), 3 – смешанный ($V > V^*$).

- ограничению на фазовые координаты:

$$(\omega, \epsilon) \in \bar{G} \tag{1.3}$$

где $G = \{(\omega, \epsilon) : \omega > 0, \epsilon > 0, g(\omega, \epsilon) < 0\}$ – выпуклая ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂G (рис. 1),

- граничным условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \epsilon(0) = 0, \quad \omega(T) = \omega_T, \quad \epsilon(T) = 0 \tag{1.4}$$

При этом время разгона принимает минимальное значение

$$T \rightarrow \min \tag{1.5}$$

Уровень V ограничения на управление находится либо экспериментально, либо из эксплуатационных соображений. Если маховик раскручивается электродвигателем, то величина V однозначно связана с максимальным током в обмотках электродвигателя.

2. Построение и анализ оптимальных режимов разгона. По условию в начальном состоянии маховик не деформирован и не имеет остаточных напряжений, поэтому точка $(0, 0)$ лежит внутри области G . В конечном состоянии (в режиме номинального вращения) маховик также должен находиться в упругом состоянии, то есть точка $(\omega_T, 0) \in \bar{G}$ (рис.1). Задача (1.1)–(1.5) является линейной задачей оптимального быстрогодействия с линейным ограничением на управление и нелинейным ограничением на фазовые координаты 1-го порядка [7–12]. Возможны два вида режима разгона: пер-

вый, когда вся фазовая траектория $\varepsilon(\omega)$ лежит в G , и второй, когда фазовая траектория выходит на границу ∂G допустимой области.

1. Пусть вся фазовая траектория $\varepsilon(\omega)$ лежит в G (рис. 1, варианты 1 и 2). В этом случае верны теоремы об управляемости, существовании, единственности и n -интервалах [7–12]. В этом случае управление $e(t)$ кусочно-постоянное с моментом переключения $t_* = T/2$.

Реализуется классический режим разгона [9–12] с кусочно-линейной зависимостью для $\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} e(t) = V, \quad \varepsilon(t) = Vt, \quad \omega(t) = Vt^2/2 \quad \text{для} \quad t \in [0, T/2) \\ e(t) = -V, \quad \varepsilon(t) = V(T-t), \quad \omega(t) = \omega_T - V(T-t)^2/2 \quad \text{для} \quad t \in [T/2; T] \end{aligned}$$

На фазовой плоскости (ω, ε) классический режим состоит из двух экстремалей: на участке чистого разгона $[0, \omega_T/2)$ зависимость $\varepsilon(\omega) = \sqrt{2V\omega}$ и на участке притормаживания $[\omega_T/2, \omega_T]$ зависимость $\varepsilon(\omega) = \sqrt{2V(\omega_T - \omega)}$.

Из условия $\omega(T/2) = \omega_T/2$ находим оптимальное время разгона

$$T = 2\sqrt{\omega_T/V}$$

Начальный и конечный участки фазовой траектории пересекаются в точке C с координатами

$$\omega_C = \omega_T/2, \quad \varepsilon_C = \sqrt{V\omega_T} \quad (2.1)$$

Очевидно, что $\varepsilon_C - q(\omega_C) \leq 0$ (рис. 1, варианты 1 и 2)).

2. Рассмотрим случай смешанного режима разгона (рис. 1, вариант 3). В этом случае фазовая траектория состоит из дуг, лежащих в G , и из части границы ∂G . Для построения оптимального режима разгона воспользуемся принципом Беллмана [13]: каждый участок оптимальной траектории является оптимальным по тому же критерию. Части траектории, лежащие в G , по-прежнему являются экстремальями, то есть $e(t) = \pm V$ в G . Будем предполагать, что траектория состоит из 3-х участков (рис. 1). На промежутках $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ траектория проходит внутри G , а на интервале (t_1, t_2) траектория проходит по границе ∂G . В момент t_1 происходит выход на границу ∂G в точке $A_1(\omega_1, \varepsilon_1)$, в момент t_2 происходит сход с границы ∂G в точке $A_2(\omega_2, \varepsilon_2)$. Если формально найти координаты точки C_3 по формуле (2.1) то, очевидно, что $\varepsilon_C^{(3)} > q(\omega_T/2)$, т.е. $C_3 \notin \bar{G}$ (рис. 1, вариант 3).

Из условия непрерывности фазовой траектории в моменты t_1 и t_2 находим уравнения для определения координат точек A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} \omega_1 = \frac{q^2(\omega_1)}{2V}, \quad \varepsilon_1 = q(\omega_1) = \sqrt{2V\omega_1} \\ \omega_2 = \omega_T - \frac{q^2(\omega_2)}{2V}, \quad \varepsilon_2 = q(\omega_2) = \sqrt{2V(\omega_T - \omega_2)} \end{aligned}$$

Момент t_1 выхода на границу ∂G и момент t_2 схода с ∂G определяются как

$$t_1 = \frac{q(\omega_1)}{V}, \quad t_2 = t_1 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{q(\omega)}$$

Реализуется смешанный режим разгона:

$$e(t) = V, \quad \varepsilon(t) = Vt, \quad \omega(t) = Vt^2/2 \text{ для } t \in [0, t_1] \quad (2.2)$$

$$e(t) = q'(\omega(t))q(\omega(t)), \quad \varepsilon(t) = q(\omega(t)), \quad \int_{\omega_1}^{\omega(t)} \frac{d\omega}{q(\omega)} = t - t_1 \text{ для } t \in (t_1, t_2)$$

$$e(t) = -V, \quad \varepsilon(t) = V(T - t), \quad \omega(t) = \omega_T - V(T - t)^2/2 \text{ для } t \in [t_2, T]$$

Между точками A_1 и A_2 на промежутке $[t_1, t_2]$ реализуется режим движения по границе ∂G (рис. 1). Время разгона по смешанному режиму (2.2) находится по формуле

$$T = \frac{q(\omega_1) + q(\omega_2)}{V} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{q(\omega)} \quad (2.3)$$

Покажем, что движение по границе ∂G оптимально по быстродействию для рассматриваемой задачи. Для этого введем в рассмотрение множество допустимых фазовых траекторий на отрезке $[\omega_1, \omega_2]$

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \{\varphi(\omega) \in C^1(\omega_1, \omega_2): \varphi(\omega_1) = \varepsilon_1, \varphi(\omega_2) = \varepsilon_2, 0 < \varphi(\omega) \leq q(\omega), \varphi'(\omega) | \varphi(\omega) \leq V\}$$

Будем считать, что сама граница ∂G является допустимой, т.е. $q(\omega) \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$. Возьмем $\forall \varphi(\omega) \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$. При движении по траектории $\varepsilon = \varphi(\omega) \leq q(\omega)$ удовлетворяются уравнения движения (1.1), в частности:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi(\omega)$$

Интегрируя это уравнение, находим время движения от точки A_1 до точки A_2 по траектории $\varepsilon = \varphi(\omega)$

$$\Delta t(\varphi) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\varphi(\omega)}$$

По условию $q(\omega) \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$, откуда следует, что

$$0 < \frac{1}{q(\omega)} \leq \frac{1}{\varphi(\omega)}, \quad \forall \omega \in [\omega_1; \omega_2]$$

Тогда интегрируя это неравенство, находим, что

$$0 < \Delta t(q) \leq \Delta t(\varphi), \quad \forall \varphi \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)$$

Таким образом, движение по допустимой границе ∂G оптимально по быстродействию. Единственность вытекает из однозначности функции $q(\omega)$. Из выражения (2.3) находится выражение для времени разгона по произвольному допустимому режиму $\varepsilon(\omega) \in \Gamma(0, \omega_T)$

$$T = \int_0^{\omega_T} \frac{d\omega}{\varepsilon(\omega)}$$

Для смешанного режима разгона (2.2) выполняются условия задачи (1.1)–(1.5), все три участка траектории оптимальны по быстродействию, поэтому согласно принципу Беллмана [13] построенный смешанный режим разгона массивного маховика является оптимальным по быстродействию. Легко убедиться, что для этого режима выполняются все необходимые условия оптимальности, а также принцип максимума Понтрягина [9–12].

Отдельно рассмотрим вопрос перехода классического режима разгона в смешанный. Для $\varepsilon(t)$ введем в рассмотрение критический классический кусочно-линейный

режим разгона с параметрами $\{V_*; T_*\}$. Он реализуется в случае совпадения точек A_1, A_2 и C_2 (рис. 1, вариант 2), то есть когда $\epsilon_C = q(\omega_C)$. Параметр V_* для $\omega_1 = \omega_2 = \omega_T/2$ находится как

$$V_* = \frac{q^2(\omega_T/2)}{\omega_T} \quad (2.4)$$

При $V \leq V_*$ реализуется классический непрерывный кусочно-линейный для $\epsilon(t)$ режим разгона, при $V > V_*$ – смешанный режим (рис. 1). Время, отвечающее критическому режиму, находится после подстановки выражения (2.4) в соответствующее соотношение для классического режима

$$T_* = 2\sqrt{\omega_T/V_*} = \frac{2\omega_T}{q(\omega_T/2)}$$

При увеличении V время разгона $T(V)$ уменьшается и при $V \rightarrow +\infty$ из соотношения (2.3) находится его предельное значение:

$$T_\infty = \int_0^{\omega_T} \frac{d\omega}{q(\omega)}$$

При этом необходимо потребовать, чтобы граница ∂G была допустимой на всем отрезке $[0, \omega_T]$, т.е. $q(\omega) \in \Gamma(0, \omega_T)$.

Время T_∞ отвечает разгону без ограничений на управление $e(t)$, поэтому верна оценка

$$0 < T_\infty < T(V), \quad \forall V < +\infty$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{T_\infty}{T_*} = \frac{1}{2} R(\omega_T) = \frac{1}{2} \frac{q(\omega_T/2)}{\omega_T} \int_0^{\omega_T} \frac{d\omega}{q(\omega)}$$

Как будет показано далее, для маховиков цилиндрической формы функция $q(\omega)$ может быть представлена в виде:

$$q(\omega) = \sqrt{C_2^4 - C_1^4 \omega^4}$$

где константы C_1 и C_2 выражаются через физические параметры материала маховика и геометрические размеры его сечения. В этом случае функция R принимает вид:

$$R\left(\frac{C_1 \omega_T}{C_2}\right) \equiv R(y) = \frac{F(y)}{y} \sqrt{1 - \frac{y^4}{16}}, \quad F(y) = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad y \in (0, 1]$$

где $F(y)$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода в форме Якоби с чисто мнимым модулем [14, 15]. В силу свойств эллиптического интеграла, функция $R(y)$ является монотонно возрастающей на $(0, 1]$ и для нее справедливо предельное соотношение

$$\inf_{(0,1]} R(y) = \lim_{y \rightarrow +0} R(y) = 1$$

Таким образом, абсолютная оценка для оптимального времени разгона цилиндрического маховика на пределе упругости принимает вид:

$$0 < \frac{T_*}{2} < T_\infty < T(V), \quad \forall V < +\infty$$

Из этой оценки следует, что никаким управлением $e(t)$ невозможно уменьшить время разгона цилиндрического маховика более чем в два раза по сравнению с критическим временем предельного классического непрерывного кусочно-линейного режима. Особенность эта появляется исключительно из-за ограничения на фазовые координаты (1.3), связанного с ограничением на тензор напряжений в процессе разгона. Для задачи оптимального торможения справедливы все полученные результаты с той разницей, что процесс разворачивается в обратном направлении в четвертом квадранте фазовой плоскости.

Мы рассмотрели частный случай ограничения на тензор напряжений в форме критерия Мизеса, гарантирующего отсутствие пластических деформаций. На самом деле можно рассматривать другие ограничения, например, критерий Кулона–Мора или условие отсутствия хрупкого разрушения [3, 4].

3. Применение полученных результатов при проектировании инерционных накопителей энергии. Решение задачи оптимального по быстродействию разгона массивного маховика на пределе упругости включает два этапа:

1) решение краевой задачи теории упругости и получение из условия Мизеса ограничений на величины угловой скорости ω и углового ускорения ϵ ;

2) решение задачи оптимального управления.

Вторая задача решена в пункте 2, поэтому остановимся на получении ограничений на фазовые координаты.

С практической точки зрения интерес представляют режимы разгона дисковых и длинных цилиндрических маховиков. Это связано с тем, что дисковый маховик может запастись энергией порядка 10^8 Дж [1]. Повышение энергозапаса накопителя сверх 10^8 Дж связано с увеличением веса и переходом к маховикам цилиндрической формы [2].

Будем решать краевую задачу теории упругости для дисковых маховиков в рамках модели плоского напряженного состояния, а для длинных цилиндрических маховиков в рамках модели плоского деформированного состояния. Очевидно, что краевая задача является осесимметричной, поэтому в полярных координатах (r, φ) она записывается в следующем виде [4]:

- уравнения статического равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\rho\omega^2 r, \quad \frac{d\sigma_{r\varphi}}{dr} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = -\rho\epsilon r$$

- деформационные соотношения Коши

$$E_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad E_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad E_{r\varphi} = \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right)$$

- краевые условия

$$u_r(a) = 0, \quad u_\varphi(a) = 0; \quad \sigma_{rr}(b) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(b) = 0$$

Для плоского напряженного состояния закон Гука записывается в виде:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu}(E_{rr} + E_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1+\nu}(E_{rr} - E_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{E}{1+\nu} E_{r\varphi}$$

Критерий Мизеса для плоского напряженного состояния имеет вид [4]:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2 \leq \sigma_e^2$$

а для плоского деформированного состояния

$$(1 - \nu + \nu^2)(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (1 - 2\nu)\sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2 \leq \sigma_e^2$$

Решение задачи в рамках модели плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_{rr}(r) = \omega^2 \frac{r}{8} \left[(1 + \nu)D_1 + \frac{1 - \nu}{r^2} D_2 - (3 + \nu)r^2 \right], \quad \sigma_{r\varphi}(r) = \varepsilon \frac{rb^2}{4} \left[\frac{b^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2} \right] \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \omega^2 \frac{r}{8} \left[(1 + \nu)D_1 - \frac{1 - \nu}{r^2} D_2 - (1 + 3\nu)r^2 \right]$$

где постоянные

$$D_1 = \frac{(1 - \nu)a^4 + (3 + \nu)b^4}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}, \quad D_2 = \frac{(3 + \nu)b^2 - (1 + \nu)a^2}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} a^2 b^2$$

Решение задачи для плоского деформированного состояния получается простой заменой в формулах (3.1) коэффициента Пуассона ν на $\frac{\nu}{1 + \nu}$ [4].

В процессе разгона необходим постоянный жесткий контакт между маховиком и ведущим валом, поэтому целесообразно рассматривать условие Мизеса на внутренней поверхности маховика при $r = a$. В этом случае ограничение на ω и ε принимает вид:

$$\varepsilon^2 + c_1^4 \omega^4 - c_2^4 \leq 0 \quad (3.2)$$

где

$$c_1^2 = \left(\frac{a^2}{b^4 - a^4} \right) \left(\frac{1 - \nu + \nu^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(3 + \nu)b^4 - 2(1 + \nu)a^2 b^2 - (1 - \nu)a^4}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} \right]$$

для плоского напряженного состояния;

$$c_1^2 = \left(\frac{a^2}{b^4 - a^4} \right) \left(\frac{1 - 2\nu}{\sqrt{3}(1 - \nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(3 + 4\nu)b^4 - 2(1 + 2\nu)a^2 b^2 - a^4}{a^2 + (1 + 2\nu)b^2} \right]$$

для плоского деформированного состояния;

$$c_2^2 = \frac{4\sqrt{3}\sigma_e a^2}{3(b^4 - a^4)}$$

Сделаем следующие замены:

$$x_1 = \frac{c_1 \omega}{c_2}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon}{c_2}, \quad X_T = \frac{c_1 \omega_T}{c_2}, \quad w = \frac{e}{c_1 c_2^3}, \quad W = \frac{V}{c_1 c_2^3}, \quad \theta = c_1 c_2 t, \quad \Theta = c_1 c_2 T \quad (3.3)$$

Тогда задача оптимального быстродействия (1.1)–(1.5) может быть записана полностью в безразмерном виде. А именно, среди кусочно-гладких фазовых траекторий (x_1 , x_2) и кусочно-непрерывных управлений w найти такие, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\frac{dx_1}{d\theta} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\theta} = w, \quad |w| \leq W, \quad x_1^4 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(\Theta) = X_T, \quad x_2(\Theta) = 0$$

при этом приведенное безразмерное время разгона принимало наименьшее значение

$$\Theta \rightarrow \min$$

Здесь функция $q(\omega)$ имеет простой вид:

$$q(x_1) = \sqrt{1 - x_1^4}$$

Согласно (2.4) критическое значение ограничения на управление находится как:

$$W_* = \frac{16 - X_T^4}{16X_T} \quad (3.4)$$

Таким образом:

- 1) при $W \leq W_*$ реализуется классический непрерывный кусочно-линейный режим для фазовой переменной x_2 ;
- 2) при $W > W_*$ реализуется смешанный режим вида

$$w = W, \quad x_2 = W\theta, \quad x_1 = \frac{W\theta^2}{2} \quad \text{для} \quad \theta \in [0, \theta_1]$$

$$w = -2\text{sn}^3(\theta - \theta_1 + \theta_*), \quad x_2 = \text{cn}(\theta - \theta_1 + \theta_*)\text{dn}(\theta - \theta_1 + \theta_*)$$

$$x_1 = \text{sn}(\theta - \theta_1 + \theta_*) \quad \text{для} \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

$$w = -W, \quad x_2 = W(\Theta - \theta), \quad x_1 = X_T - \frac{W(\Theta - \theta)^2}{2} \quad \text{для} \quad \theta \in [\theta_2; \Theta]$$

где $\text{sn}(x)$, $\text{cn}(x) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(x)}$ и $\text{dn}(x) = \sqrt{1 + \text{sn}^2(x)}$ – эллиптические функции Якоби (синус-амплитуда, косинус-амплитуда и дельта-амплитуда, соответственно) [14, 15].

Оптимальное приведенное время разгона находится как:

$$\Theta = \frac{1}{W} [\sqrt{1 - (x_1^{(1)})^4} + \sqrt{1 - (x_1^{(2)})^4}] + \text{arcsn}(x_1^{(2)}) - \text{arcsn}(x_1^{(1)})$$

где $\text{arcsn}(x) = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода в форме Якоби с чисто мнимым модулем, функция обратная к $\text{sn}(x)$ [14].

Координаты точек $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ выхода на ∂G и схода с ∂G , соответственно, ищутся как корни уравнений

$$(x_1^{(1)})^4 + 2Wx_1^{(1)} - 1 = 0, \quad (x_1^{(2)})^4 + 2W(X_T - x_1^{(2)}) - 1 = 0$$

Величины θ_1 , θ_2 и θ_* вычисляются по формулам

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2x_1^{(1)}}{W}}, \quad \theta_2 = \Theta - \sqrt{\frac{2(X_T - x_1^{(2)})}{W}}, \quad \theta_* = \text{arcsn}(x_1^{(1)})$$

4. Методика оценки затрат на уменьшение времени разгона цилиндрических маховиков. В результате замен (3.3) и сведения задачи оптимального управления к безразмерному виду построено универсальное решение, пригодное для произвольных маховиков цилиндрической формы. На рис. 2 показана универсальная зависимость T/T_* от V_*/V , в которую не входят ни параметры материала, ни размеры маховика. Величина X_T (или ω_T) является параметром кривой. Эта зависимость позволяет, не решая задачи, оценить эффективность затрат на увеличение максимального управления V при необходимости уменьшить время разгона T .

Например, пусть имеется некоторый базовый вариант устройства с параметрами $\{V_1, T_1\}$. Требуется уменьшить время разгона маховика до величины $T_2 < T_1$. Соответствующий параметр V_2 находится по следующей методике:

1. По формулам (3.2) вычисляются константы c_1 и c_2 , отвечающие данному маховику.
2. После пересчета по формулам (3.3) находятся величины $X_T, W_1, \Theta_1, \Theta_2$.

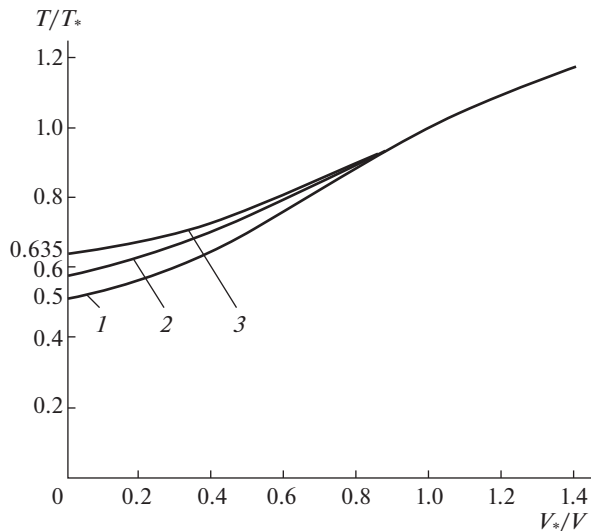


Рис. 2. Универсальные зависимости для цилиндрических маховиков: кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям параметра $\omega_T^{(1)} \ll 1$, $\omega_T^{(1)} < \omega_T^{(2)} < \omega_T^{(3)} = \omega_T^{\max}$ соответственно.

3. По графику на рис. 2 и значению $\alpha_2 = \frac{T_2}{T_*} = \frac{\Theta_2}{\Theta_*}$ определяется параметр $\beta_2 = \frac{W_*}{W_2}$,

где W_* находится по формуле (3.4), а $\Theta_* = 2\sqrt{W_* X_T}$.

4. Вычисляется величина $V_2 = \frac{c_1 c_2 W_*}{\beta_2}$.

Зная реальные затраты на увеличение максимального управления от значения V_1 до V_2 , можно сопоставить этот уровень затрат с реальным выигрышем во времени разгона маховика. Однако необходимо иметь в виду, что ни каким управлением невозможно уменьшить время разгона цилиндрического маховика более чем в два раза по сравнению с критическим временем классического кусочно-линейного режима. Максимальный разброс кривых на рис. 2 достигается при $V \rightarrow +\infty$, т.е. при $V_*/V \rightarrow +0$. В зависимости от величины конечной угловой скорости ω_T (или X_T) нижняя грань отношения T/T_* изменяется от 0.5 до, примерно, 0.635.

Выводы. В статье рассмотрены вопросы построения и анализа оптимальных по быстродействию режимов разгона или торможения массивных маховиков на пределе прочности. Рассмотрены квазистатические режимы управления вращением маховика крутящим моментом. Решение задачи включает два этапа: а) определение напряженно-деформированного состояния маховика при квазистатическом вращении и нахождение ограничений на угловую скорость и угловое ускорение из условия пластичности Мизеса; б) решение задачи оптимального быстродействия линейной динамической системы с линейным ограничением на управление и нелинейным ограничением на фазовые координаты 1-го порядка.

1. Решена задача оптимального по быстродействию разгона или торможения массивных маховиков на пределе прочности в общем виде. Построены два типа опти-

мальных режимов изменения крутящего момента. Первый отвечает классическому кусочно-линейному режиму, второй – смешанному режиму, допускающему движение на пределе упругого деформирования материала. В общем случае смешанный режим состоит из трех частей: начального линейного, среднего нелинейного (при движении на пределе упругости) и конечного линейного участков. Доказано, что смешанный режим является оптимальным по быстродействию.

2. Предложен критерий, по которому определяется тип оптимального решения в зависимости от исходных данных задачи. Установлено, что с расширением диапазона изменения первой производной по времени от крутящего момента классический режим переходит в смешанный. Определены параметры критического режима разгона или торможения, при котором еще реализуется классическое кусочно-линейное управление.

3. Построена оценка снизу для оптимального времени разгона или торможения массивных цилиндрических маховиков. Установлено, что никаким управлением невозможно уменьшить время разгона или торможения массивного маховика более чем в два раза по сравнению с критическим кусочно-линейным режимом управления крутящим моментом.

4. Для дисковых и длинных цилиндрических маховиков построены универсальные оптимальные режимы разгона или торможения на пределе упругости. Полученные решения не зависят ни от геометрических размеров, ни от свойств материала маховика.

5. Предложена методика определения затрат на уменьшение времени разгона или торможения массивного цилиндрического маховика с учетом упругопластических свойств материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулия Н.В. Накопители энергии. М.: Наука, 1980. 151 с.
2. Гулия Н.В. Супермаховики – из суперкарбона // Изобретатель-рационализатор. 2005. № 12 (672). С. 10–15.
3. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 208 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М: Наука, 1988. 711 с.
5. Бригаднов И.А. Многокритериальная оценка несущей способности геоматериалов // Записки Горного института. 2016. Т. 218. С. 289–295.
6. Бригаднов И.А. Прямые методы решения вариационной задачи для многокритериальной оценки несущей способности геоматериалов // Записки Горного института. 2018. Т. 232. С. 368–374.
<https://doi.org/10.31897/PMI.2018.4.368>
7. Троицкий В.А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами // ПММ. 1962 Т. 26. Вып. 3. С. 431–443.
8. Семенов А.С., Троицкий В.А. О задаче оптимизации с ограничениями на фазовые координаты // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 127–131.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
11. Матвеев А.С. Введение в математическую теорию оптимального управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2018. 195 с.
12. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. М.: URSS, 2019. 200 с.
13. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностран. лит., 1960. 400 с.
14. Беляков В.М., Кравцова Р.И., Раппопорт М.Г. Таблица эллиптических интегралов. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 656 с.
15. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.