КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 84, № 2, с. 141–163

УДК 534.1:551.501.8:551.594

КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ И ДИПОЛЬНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, СОЗДАВАЕМОЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ НЕЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2022 г. А. И. Григорьев[1], *, Н. Ю. Колбнева[2], С. О. Ширяева[2]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, пр-кт Вернадского, д. 101, к. 1, Москва, 119526 Россия

[2]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская дом 14, Ярославль, 150000 Россия

**e-mail: grigorai@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.12.2021 г.
После доработки 04.03.2022 г.
Принята к публикации 06.03.2022 г.

В аналитических расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде ε осцилляций незаряженной электропроводной капли во внешнем электростатическом поле найдено аналитическое выражение для интенсивности ее дипольного электромагнитного излучения, связанного с осцилляциями, позволяющее исследовать зависимость интенсивности излучения от физических параметров задачи. Такая задача представляет интерес в связи с проблемой радиолокационного зондирования таких метеорологических объектов как облака, туманы и смерчи. Исследована временная эволюция интенсивности электромагнитного излучения и ее компонент: величины индуцированного заряда и дипольного момента, капли. Во втором порядке малости по квадрату отношения характерного линейного размера капли к длине излучаемой волны оценена интенсивность дипольного излучения. Она оказалась на величину ~ε больше интенсивности, получаемой в линейных по ε расчетах. Однако, квадратичная по ε поправка к интенсивности излучения от капли реализуется в другом интервале частот, что влияет на спектр электромагнитного излучения.

Ключевые слова: капля, электростатическое поле, капиллярные осцилляции, электромагнитное излучение.

DOI: 10.31857/S0023291222020057

ВВЕДЕНИЕ

В нижеследующем рассмотрении в аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций рассчитывается интенсивность дипольного электромагнитного излучения незаряженной электропроводной капли, совершающей нелинейные осцилляции конечной амплитуды во внешнем электростатическом поле.

Хорошо известно, что на поверхности незаряженной электропроводной капли, помещенной во внешнее электростатическое поле, появляются индуцированные полем заряды противоположных знаков: отрицательные на стороне капли, обращенной к полю, и положительные на противоположной [1]. В капле жидкости всегда существуют капиллярные волны, связанные с тепловым движением молекул [2], приводящие к искажению равновесной в электростатическом поле формы капли, которая будет примерно сфероидальной [3, 4]. Капиллярные волны, отличаются от обычных гравитационных только тем, что имеют существенно меньшие длины и реализуются не под действием силы тяжести, а под влиянием сил поверхностного натяжения (капиллярных сил). Амплитуда тепловых капиллярных волн (реализующихся в капле) весьма мала: $\sim\sqrt{\kappa T/\sigma}$, где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, σ – коэффициент поверхностного натяжения [2]. Для всех жидкостей, включая жидкие металлы, их амплитуда не превышает 0.1 нм. Но для нижеследующего рассмотрения важно, что индуцированные в капле внешним электростатическим полем заряды, двигаясь ускоренно вместе с поверхностью осциллирующей капли, будут излучать электромагнитные волны [1, 5–7].

Теория излучения электромагнитных волн при ускоренном движении электрических зарядов хорошо развита [8, 9]. Полное электромагнитное

излучение системы ускоренно движущихся зарядов набольших расстояниях от излучающей системы согласно мультипольным представлениям [8, 9] можно представить в виде суммы дипольной, квадрупольной и магнитно-дипольной компонент. Эти компоненты значительно различаются по интенсивности. Так, для капли воды, осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле, интенсивность дипольного излучения от капли примерно в 10^{14} раз превышает интенсивность квадрупольного излучения, а также магнитно-дипольного [10].

В теории электромагнитного излучения вводится малый параметр δ – квадрат отношения характерного линейного размера системы к длине излучаемой волны [8, 9]. Именно по нему и ведется разделение всего излучения на мультипольные компоненты.

Для осциллирующей капли проводящей жидкости, имеющей индуцированные заряды, следует использовать еще один малый параметр: ε – отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли.

Проблема существования самого факта наличия электромагнитного излучения от осциллирующей капли в грозовом облаке была впервые поставлена в [5] в связи с изучением электромагнитных помех от конвективных облаков и их дистанционного электромагнитного зондирования [11–13]. В [5] же был предложен способ оценивания его интенсивности на модели осциллирующей и излучающей заряженной капли идеальной жидкости, исходя из решения электрогидродинамической задачи об осцилляциях заряженной капли и закона сохранения энергии.

В [14] была рассмотрена задача о расчете интенсивности дипольной компоненты полного излучения от осциллирующей заряженной капли в электростатическом поле, а в [15] решена задача о расчете интенсивности квадрупольной компоненты полного излучения. В настоящей работе, в рамках асимптотического аналитического подхода, на модели капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости во втором порядке малости будет проведена качественная оценка интенсивности дипольной компоненты полного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле грозового облака.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Постановка задачи. Пусть дана незаряженная осциллирующая капля идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ, в однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}_0$. Предположим, что окружающая для капли среда может моделироваться вакуумом, а ее объем равновелик объему сферы радиуса R. Равновесная форма капли в электростатическом поле в линейном приближении по амплитуде стационарной деформации может считаться сфероидальной [16]. Такой сфероидальной каплей будем моделировать каплю в грозовом облаке.

Численные величины размеров капель и напряженностей внутриоблачных электрических полей, необходимых для проведения качественных оценок, будем брать согласно [17, 18].

Все расчеты задачи будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = [4\pi\varepsilon_0]^{-1} = 1$ (ε_0 – электрическая постоянная). Остальные величины задачи будут выражены в долях своих характерных значений: $[E_0] = [4\pi\varepsilon_0]^{-\frac{1}{2}} R^{-1/2}\sigma^{1/2}$, $[t] = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}$, $[V] = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}$, $[r] = R$, $[P] = R^{-1}\sigma$.

Равновесный эксцентриситет капли (отношение межфокусного расстояния сфероидальной капли к длине ее большой оси) в указанных безразмерных переменных определится выражением $e^2 \approx \dfrac{9E_0^2}{16\pi}$, т.е. $e^2 \sim E_0^2$ [16]. Уравнение образующей равновесной сфероидальной поверхности капли запишется в виде:

$$r(\theta) \approx 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) + O(e^4), \quad \mu \equiv \cos\theta, \tag{1}$$

O – символ порядка [19]; $P_2(\cos\theta) \equiv \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$ – второй полином Лежандра [8, 16]. Сфероидальную равновесную форму капли и будем использовать в дальнейших качественных расчетах.

Строго говоря, в квадратичном приближении по ε имеет место отклонение равновесной формы от сфероидальности, пропорциональное третьему полиному Лежандра $P_3(\cos\theta) \equiv \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$ [16]. Но, во-первых, амплитуда такого отклонения весьма мала (меньше на порядок по сравнению с поправкой, пропорциональной второму полиному Лежандра), а, во-вторых, выгода использования сфероидальной формы в аналитических расчетах очевидна: для такой формы имеются готовые аналитические решения для распределения электрического потенциала в окрестности капли в разных ситуациях [20–22].

Следует отметить, что квадратичная по ε поправка к асимптотически точному решению первого порядка по ε имеет место в другом интервале частот, по сравнению с решением первого порядка. Хотя такая поправка будет не совсем корректна (в соответствии со сказанным в предыдущем абзаце), ее следует учесть уже хотя бы потому, что

в общей интенсивности излучения она будет в 10^{13} раз превышать интенсивность квадрупольного и магнитно-дипольного излучений [10].

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сфероидальная форма капли с эксцентриситетом e претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение $\xi(\theta)$ фиксированной амплитуды. Отношение $\max|\xi(\theta)|$ к радиусу R (в размерном виде) будем использовать в качестве малого параметра: $\varepsilon \equiv \left(\frac{\max|\xi(\theta)|}{R}\right)$.

Т.к. начальное возмущение равновесной поверхности капли осесимметрично очевидно, что такая симметрия сохранится и при $t > 0$, а уравнение ее образующей в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных будет иметь вид:

$$r(\theta,t) = r(\theta) + \xi(\theta,t) = 1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta,t),$$
$$h(\theta) \equiv \frac{1}{3}P_2(\mu), \quad |\xi| \ll 1. \tag{2}$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $\vec{V}(\vec{r},t) = \nabla\psi(\vec{r},t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\vec{r},t)$ [23]. Поскольку течение жидкости в капле генерируется возмущением поверхности, то величина поля скоростей течения жидкостей имеет тот же порядок малости, что и амплитуда капиллярных волн в капле. Иначе говоря, все три указанные величины имеют один и тот же порядок малости: $|\vec{V}(\vec{r},t)| \sim \psi(\vec{r},t) \sim \varepsilon$.

Математическая формулировка задачи об электромагнитном излучении незаряженной капли во внешнем электростатическом поле имеет вид:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = 0, \quad \Delta\Phi(\vec{r},t) = 0, \tag{3}$$

$$r \to 0: \quad \psi(\vec{r},t) \to 0, \tag{4}$$

$$r \to \infty: \quad \vec{E}(\vec{r},t) \to \vec{E}_0 \equiv E_0\vec{e}_z, \quad \vec{E} = -\nabla\Phi, \tag{5}$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta,t): \quad \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial\theta}\left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta}\right), \tag{6}$$

$$\Delta P - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + P_E = P_\sigma, \tag{7}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi_S(t), \tag{8}$$

где $\Phi(\vec{r},t)$ – электрический потенциал [9]; $\Phi_s(t)$ – постоянный вдоль поверхности капли электрический потенциал; $\vec{e}_z$ – единичный орт координаты z.

Для замыкания выписанной системы введем интегральные условия: неизменности полного объема (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс, а также условие незаряженности капли.

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi, \quad \int_V \vec{r} r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0, \tag{9}$$

$$V = [0 \le r \le r(\theta) + \xi(\theta,t),\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi],$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S (\vec{n},\vec{E})\, dS = 0, \tag{10}$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta,t),\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi],$$

$\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности капли; V и S – объем и площадь поверхности капли, получающиеся вращением вокруг ее оси симметрии образующей, определенной соотношением (2); закономерности изменения углов θ и φ определены (9) и (10).

Начальные условия в общем случае задаются в виде начальной деформации равновесной сфероидальной формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon\sum_{j\in\Xi} h_j P_j(\mu), \quad \sum_{j\in\Xi} h_j = 1, \quad \frac{\partial\xi(\theta)}{\partial t} = 0, \tag{11}$$

где Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных мод осцилляций; $P_j(\mu)$ – полином Лежандра j-ого порядка, j – целое число, $\mu \equiv \cos\theta$.

В выражениях (6)–(11) введены обозначения: ΔP – перепад постоянных давлений внутри капли и вне капли в состоянии равновесия, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $P_E = \frac{\vec{E}^2}{8\pi}$ – давление электрического поля, $P_\sigma = \mathrm{div}\vec{n}$ – капиллярное давление (можно отметить, что P_σ, согласно [23], стр. 334 – лапласовское давление, определяемое как произведение коэффициента поверхностного натяжения на удвоенную среднюю кривизну поверхности жидкости в данной точке, которая определяется как дивергенция $\vec{n}$ [24, стр. 179]), $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности жидкости, описываемой выражением (2), h_j – коэффициенты, определяющие парциальный вклад j-ой колебательной моды в суммарное начальное возмущение, ξ_0 и ξ_1 – константы (амплитуды нулевой и первой мод осцилляций), равные нулю в расчетах первого порядка, и определяемые в расчетах второго порядка малости по ε из условий постоянства объема и неподвижности центра масс в начальный момент времени и с точностью до слагаемых $\sim\varepsilon e^2$ и $\sim\varepsilon^2$, равные:

$$\xi_0 \approx -\sum_{j\in\Xi}\left[\varepsilon^2\frac{h_j^2}{(2j+1)}+\varepsilon e^2\frac{2}{15}h_j\delta_{j,2}\right]+O(\varepsilon^3),$$
$$\xi_1 \approx -\sum_{j\in\Xi}\left[\varepsilon^2\frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)}+\varepsilon e^2\frac{9}{35}h_j\delta_{j,3}\right]+O(\varepsilon^3), \quad (12)$$

где $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера.

Отметим, что в сформулированной задаче имеются два малых параметра: квадрат эксцентриситета капли e^2 и безразмерная амплитуда $\varepsilon \equiv \left(\frac{\max|\xi(\theta)|}{R}\right)$. Согласно [25, 26] свободно падающие осциллирующие капли дождя совершают сфероидальные осцилляции с амплитудой до шестидесяти процентов величины от радиуса. Иными словами, целесообразно рассмотреть ситуацию, когда малые параметры e^2 и ε имеют один порядок величины $e^2 \sim \varepsilon$. Это несколько упростит громоздкие вычисления, но сузит область применимости полученных результатов, что для проводимой качественной оценки представляется несущественным. Ограничивая рассмотрение поставленной задачи квадратичным приближением, нижеследующие расчеты проведем с сохранением слагаемых $\sim\varepsilon^2$ и $\sim e^2\varepsilon$. Для определенности положим $e^2 \sim \varepsilon$, сводя в таком случае задачу к одному малому параметру ε.

Основанием для принятия предположения, сделанного в предыдущем абзаце, является то, что напряженность внутриоблачного электростатического поля, как правило, мала [18], стр. 440, табл. 1. Но напряженность электростатического поля определяет величину эксцентриситета капель, которые малы в свою очередь. Таким образом, квадрат эксцентриситета e^2 может быть сравним по величине с безразмерной амплитудой мод осцилляций облачной капли ε, обдуваемой восходящим потоком воздуха.

Учитывая, что отклонение равновесной сфероидальной формы капли от сферической связано с наличием электрического поля, примем $E_0 \sim e$. Таким образом, в дальнейших расчетах электрического потенциала в окрестности возмущенного заряженного сфероида во внешнем поле и величины индуцированного заряда на возмущенной поверхности капли потребуем учесть слагаемые порядка $\sim\varepsilon^{5/2}$. Эти слагаемые связанны с нелинейным взаимодействием возбужденных колебательных мод, как со стационарной деформацией капли $\sim E_0e^2\varepsilon \sim e^{3/2}\varepsilon \sim \varepsilon^{5/2}$, так и между собой, а также со стационарной деформацией капли $\sim E_0\varepsilon^2 \sim e^{1/2}\varepsilon^2 \sim \varepsilon^{5/2}$.

Введем формальные параметры β_E и β_e в соответствии со следующими выражениями: $E_0 \equiv \beta_E\varepsilon^{1/2}$, $e^2 \equiv \beta_e\varepsilon$, чтобы иметь возможность в конечных выражениях разделить вклады от E_0 и e^2. В окончательном результате, чтобы избавиться от формальных обозначений, положим $\beta_E = \beta_e = 1$.

2. Асимптотические разложения искомых величин. Будем решать задачу с точностью до ε^2 методом многих временны́х масштабов [19]. Искомые функции $\xi(\theta,t)$, $\psi(\vec{r},t)$, $\Phi(\vec{r},t)$ представим в виде рядов по степеням ε и будем считать зависящими не просто от времени t, а от разных его масштабов, определенных как $T_m \equiv \varepsilon^m t$, где m целое число: $m = 0;1;2$:

$$\xi(\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\xi^{(m)}(\theta,T_0,T_1),$$
$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\psi^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1), \quad (13)$$
$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi^{(\mathrm{eq})}(r,\theta)+\varepsilon^{3/2}\Phi^{(3/2)}(r,\theta,T_0)+$$
$$+\varepsilon^{5/2}\Phi^{(5/2)}(r,\theta,T_0)+O(\varepsilon^{7/2}).$$

Здесь разложение для потенциала электрического поля ведется по полуцелым степеням параметра ε, поскольку $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. В итоге разложение для электрического потенциала $\Phi^{(\mathrm{eq})}(r,\theta)$ в окрестности равновесного незаряженного сфероида во внешнем поле также ведется по полуцелым степеням параметра ε и записывается в виде

$$\Phi^{(\mathrm{eq})}(r,\theta) = \varepsilon^{1/2}\beta_E r\left[\frac{1}{r^3}-1\right]P_1(\mu)+$$
$$+\varepsilon^{3/2}\beta_E\beta_e\frac{2}{5}\frac{1}{r^2}\left[P_1(\mu)+\frac{3}{2}\frac{1}{r^2}P_3(\mu)\right]. \quad (14)$$

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу [19]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon^1\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+O(\varepsilon^3).$$

Подставляя разложения (13) в (3)–(10) и приравнивая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, выделим задачи для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}(\theta,t)$, $\psi^{(m)}(\vec{r},t)$, $\Phi^{(k)}(\vec{r},t)$. В этих выражениях верхние индексы m и k, стоящие в скобках, указывают на порядок малости разложений; индекс m является целым числом, а индекс k – полуцелым.

Решения уравнений Лапласа (3) для поправок к гидродинамическому $\psi^{(m)}(\vec{r},t)$ и электрическо-

му $\Phi^{(k)}(\vec{r},t)$ потенциалам, удовлетворяющие граничным условиям (4), (5), а также поправки к равновесной форме поверхности капли $\xi^{(m)}(\theta,t)$ запишем в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\psi^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1)\,r^nP_n(\mu),\quad (m=1;2), \tag{15}$$

$$\Phi^{(k)}(r,\theta,T_0)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k)}(r,\theta,T_0)\,r^{-(n+1)}P_n(\mu),\quad (k=3/2;5/2), \tag{16}$$

$$\xi^{(m)}(\theta,T_0,T_1)=\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(m)}(\theta,T_0,T_1)\,P_n(\mu),\quad (m=1;2). \tag{17}$$

3. Задача первого порядка малости по ε. В первом порядке малости по **ε** для определения амплитудных коэффициентов $D_n^{(m)}$, $M_n^{(m)}$ в решениях (15), (17) (при $m=1$) из уравнений (6), (7), (9) получается система:

$$r=1:\ \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0}=\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r},$$
$$\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial T_0}=\left(2+\hat{L}_\theta\right)\xi^{(1)},\quad \hat{L}_\theta\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{18}$$
$$\int_0^\pi\xi^{(1)}\sin\theta d\theta=0,\quad \int_0^\pi\xi^{(1)}\cos\theta\sin\theta d\theta=0.$$

Выражения для поправок первого порядка к коэффициентам разложений (15), (17) несложно найти из системы (18) в виде

$$M_0^{(1)}(T_0,T_1)=0,\quad M_1^{(1)}(T_0,T_1)=0,\quad D_0^{(1)}(T_0,T_1)=0,$$
$$D_n^{(1)}(T_0,T_1)=\frac{1}{n}\frac{\partial M_n^{(1)}(T_0,T_1)}{\partial T_0},\quad (n\ge 1). \tag{19}$$

Для нахождения коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0,T_1)$ при $n\ge 2$ необходимо решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}M_n^{(1)}(T_0,T_1)+\omega_{n,s}^2M_n^{(1)}(T_0,T_1)=0,$$
$$\omega_{n,s}^2=n(n-1)(n+2), \tag{20}$$

где $\omega_{n,s}$ – частота собственных осцилляций поверхности незаряженной сферы.

Решением уравнения (20) являются гармонические функции по времени T_0 с коэффициентами, зависящими от времени T_1:

$$M_n^{(1)}(T_0,T_1)=$$
$$=A_n^{(1)}(T_1)\exp(i\omega_{n,s}T_0)+\text{к.с.},\quad (n\ge 2), \tag{21}$$
$$A_n^{(1)}(T_1)\equiv a_n^{(1)}(T_1)\exp\left[ib_n^{(1)}(T_1)\right].$$

Аббревиатура “к.с.” означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Зависимость $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ от параметра T_1 определяется в следующих порядках малости.

4. Задача порядка 3/2 по ε. Система уравнений для определения коэффициентов $F_n^{(3/2)}$ в решении (16) получается из условий (8), (10) путем группировки слагаемых $\sim\varepsilon^{3/2}$:

$$r=1:\ \Phi^{(3/2)}-3\beta_E\xi^{(1)}P_1(\mu)=\Phi_s^{(3/2)},$$
$$\int_0^\pi\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial r}\sin\theta d\theta=0. \tag{22}$$

Здесь $\Phi_s^{(3/2)}$ – поправка порядка 3/2 к величине потенциала капли.

Подставляя разложение (16) при $k=3/2$ и решение первого порядка (17) в систему уравнений (22), определим коэффициенты $F_n^{(5/2)}(T_0)$ в виде:

$$F_0^{(3/2)}(T_0)=0,\quad \Phi_s^{(3/2)}=0,$$
$$F_n^{(3/2)}(T_0)=3\beta_E\times$$
$$\times\left(\mu_{n-1}^{+}M_{n-1}^{(1)}(T_0,T_1)+\mu_{n+1}^{-}M_{n+1}^{(1)}(T_0,T_1)\right),\quad (n\geq 1),\tag{23}$$
$$\mu_n^{+}=\frac{n+1}{2n+1},\quad \mu_n^{-}=\frac{n}{2n+1}.$$

По полученным выражениям для искомых величин $\xi(\theta,t)$, $\psi(\vec{r},t)$, $\Phi(\vec{r},t)$ можно найти аналитическое выражение для интенсивности дипольного излучения незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, в первом порядке малости, как это было проделано, например, в [10]. Но поскольку цель работы в определении нелинейной поправки, обнаруживаемой в квадратичном приближении по малому параметру, то далее будем решать электрогидродинамическую задачу второго порядка малости по ε.

5. Задача второго порядка малости по ε. Для определения поправок второго порядка малости к найденному решению (т.е. для отыскания функций $\xi^{(2)}(\theta,t)$, $\psi^{(2)}(\vec{r},t)$) приведем систему уравнений, получающуюся из (6)–(10) приравниванием слагаемых при ε^2:

$$r=1:$$
$$\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1}=\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\times$$
$$\times\left[\xi^{(1)}+\beta_e h(\theta)\right]-\left[\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}+\beta_e\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta}\right]\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\theta},$$
$$-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial T_1}-\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\partial T_0}\left[\xi^{(1)}+\beta_e h(\theta)\right]+P_E^{(2)}=$$
$$=-\left(2+\hat{L}_\theta\right)\xi^{(2)}+2\xi^{(1)}\left(1+\hat{L}_\theta\right)\xi^{(1)}+\tag{24}$$
$$+2\beta_e h(\theta)\left(\hat{L}_\theta-4\right)\xi^{(1)},$$
$$\int_0^\pi\left[3\xi^{(2)}+3(\xi^{(1)})^2+2\beta_e\xi^{(1)}P_2(\mu)\right]\sin\theta d\theta=0,$$
$$\int_0^\pi\left[2\xi^{(2)}+3(\xi^{(1)})^2+2\beta_e\xi^{(1)}P_2(\mu)\right]\cos\theta\sin\theta d\theta=0,$$
$$P_E^{(2)}=-\frac{3}{4\pi}\left[\beta_E P_1(\mu)\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial r}+6\beta_E^2\left(P_1(\mu)\right)^2\xi^{(1)}\right].$$

Подставляя в систему уравнений (24) разложения (15) при $m=1$; 2 и решение порядка 3/2 из (23), получим выражения для коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0)$, $D_n^{(2)}(T_0)$ в виде:

$$M_0^{(2)}(T_0)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\left(M_k^{(1)}(T_0,T_1)\right)^2-$$
$$-\frac{2}{15}\beta_e M_2^{(1)}(T_0,T_1),$$
$$M_1^{(2)}(T_0)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9k}{(2k+1)(2k-1)}\times$$
$$\times M_{k-1}^{(1)}(T_0,T_1)M_k^{(1)}(T_0,T_1)-\frac{9}{35}\beta_e M_3^{(1)}(T_0,T_1),$$
$$D_0^{(2)}(T_0)=0,\quad D_n^{(2)}(T_0)=$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0}+\frac{\partial M_n^{(1)}(T_0,T_1)}{\partial T_1}+\frac{1}{3}\beta_e N_0-\right.$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[m(m-1)K_{m,k,n}-\alpha_{m,k,n}\right]\times\tag{25}$$
$$\left.\times\frac{1}{m}\frac{\partial M_m^{(1)}(T_0,T_1)}{\partial T_0}M_k^{(1)}(T_0,T_1)\right\},\quad (n\geq 1),$$
$$N_0=\frac{\partial M_{n+2}^{(1)}(T_0,T_1)}{\partial T_0}\left[\frac{\alpha_{2,n+2,n}}{(n+2)}-K_{2,n+2,n}(n+1)\right]+$$
$$+\frac{\partial M_n^{(1)}(T_0,T_1)}{\partial T_0}\left[\frac{\alpha_{2,n,n}}{n}-K_{2,n,n}(n-1)\right]+$$
$$+\frac{\partial M_{n-2}^{(1)}(T_0,T_1)}{\partial T_0}\left[\frac{\alpha_{2,n-2,n}}{(n-2)}-K_{2,n-2,n}(n-3)\right],$$
$$K_{m,k,n}=\left[C_{k0,m0}^{n0}\right]^2,$$
$$\alpha_{m,k,n}=-\sqrt{m(m+1)k(k+1)}C_{m0,k0}^{n0}C_{m-1,k1}^{n0},$$

где $C_{mk,lp}^{nq}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [27], отличные от нуля, только когда индексы удовлетворяют соотношениям $|m-l|\leq n\leq m+l$, $m+l+n$ – четное и $k+p=q$.

Используя решение первого порядка (21), запишем неоднородное дифференциальное уравнение для определения амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0)$ при $n\geq 2$ в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(2)}(T_0) + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0) =$$
$$= G_n \exp(i\omega_n T_0) + L_{n,1} A_{n-2}^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_{n-2} T_0) +$$
$$+ L_{n,2} A_{n+2}^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_{n+2} T_0) + \qquad (26)$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ \lambda_{m,k,n}^{(+)} A_m^{(1)}(T_1) A_k^{(1)}(T_1) \exp[i(\omega_m + \omega_k) T_0] +$$
$$+ \lambda_{m,k,n}^{(-)} A_m^{(1)}(T_1) \bar{A}_k^{(1)}(T_1) \exp[i(\omega_m - \omega_k) T_0] \Big\} + \text{к.с.}$$

$$G_n \equiv -2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} + L_{n,0} A_n^{(1)}(T_1),$$
$$L_{n,0} = \frac{9}{4\pi}\beta_E^2 n\left[(n-2)\mu_n^- \mu_{n-1}^+ + n\mu_{n+1}^- \mu_n^+\right] +$$
$$+ \beta_e\left[\omega_n^2 \frac{(n+1)}{(n-1)(2n+3)} + n^3 K_{2,n,n}\right],$$
$$L_{n,1} \equiv \frac{9}{4\pi}\beta_E^2 n(n-2)\mu_{n-1}^+ \mu_{n-2}^+ +$$
$$+ \frac{1}{3}\beta_e n\left[9\omega_{n-2}^2 \frac{(n-1)}{(n-3)(n-2)(2n-3)(2n-1)} + \right.$$
$$\left. + K_{2,n-2,n}\left(3n^2 - 11n + 12\right)\right],$$
$$L_{n,2} \equiv \frac{9}{4\pi}\beta_E^2 n^2 \mu_{n+1}^- \mu_{n+2}^- +$$
$$+ \frac{1}{3}\beta_e\left[6\omega_{n+2}^2 \frac{(3n+1)}{(2n+3)(2n+5)} + \right.$$
$$\left. + K_{2,n+2,n} n\left(3n^2 + 7n - 8\right)\right],$$
$$\lambda_{m,k,n}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}\left[(\gamma_{m,k,n} + \gamma_{k,m,n}) \pm \omega_m \omega_k (\eta_{m,k,n} + \eta_{k,m,n})\right],$$
$$\gamma_{m,k,n} \equiv K_{m,k,n} \times$$
$$\times\left[\omega_m^2 (n - m + 1) + 2n(m(m+1) - 1)\right] + \frac{\alpha_{m,k,n}}{m}\omega_m^2,$$
$$\eta_{m,k,n} \equiv K_{m,k,n}\left(\frac{n}{2} - m + 1\right) + \alpha_{m,k,n}\frac{1}{m}\left(1 + \frac{n}{2k}\right).$$

Горизонтальная черта сверху над A_n в (26) обозначает комплексное сопряжение.

Требование исключения из решений уравнения (25) секулярных членов показывает, что $a_n^{(1)}$ не зависит от времени T_1 и $b_n^{(1)}$ линейно зависит от T_1:

$b_n^{(1)}(T_1) = -\dfrac{L_{n,0}}{2\omega_n} T_1 + b_n^{(0)}$, где $b_n^{(0)}$ – константа, определяемая из начальных условий.

Следовательно, общее решение уравнения (26) при $n \geq 2$ будет представлено в виде:

$$M_n^{(2)}(T_0) = A_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) +$$
$$+ N_n^{(-)} A_{n-2}^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_{n-2} T_0) +$$
$$+ N_n^{(+)} A_{n+2}^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_{n+2} T_0) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ N_{m,k,n}^{(+)} A_m^{(1)}(T_1) A_k^{(1)}(T_1) \times$$
$$\times \exp[i(\omega_m + \omega_k) T_0] +$$
$$+ N_{m,k,n}^{(-)} A_m^{(1)}(T_1) \bar{A}_k^{(1)}(T_1) \exp[i(\omega_m - \omega_k) T_0] \Big\} + \text{к.с.}, \qquad (27)$$
$$N_n^{(-)} \equiv \frac{L_{n,1}}{\omega_n^2 - \omega_{n-2}^2}, \quad N_n^{(+)} \equiv \frac{L_{n,2}}{\omega_n^2 - \omega_{n+2}^2},$$
$$N_{m,k,n}^{(\pm)} \equiv \frac{\lambda_{m,k,n}^{(\pm)}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_k)^2}.$$

Начальные условия (11) после подстановки в них разложений (13) превратятся в систему уравнений для функций первого и второго порядков малости:

$$t = 0: \quad \xi^{(1)}(\theta, t) = \sum_{j\in\Xi} h_j P_j(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_0} = 0,$$
$$\xi^{(2)}(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu),$$
$$\frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} = -\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1},$$

позволяющую определить действительные константы $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ в решениях (21), (27).

Удовлетворяя начальным условиям в первом приближении по ε, получим:

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{j\in\Xi} h_j \delta_{n,j}, \quad b_n^{(1)} = 0, \quad (j \in \Xi,\ n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (28)$$

во втором по ε приближении находим:

$$a_n^{(2)} = -\frac{1}{2}\sum_{j\in\Xi} h_j \left(N_n^{(-)}\delta_{n-2,j} + N_n^{(+)}\delta_{n+2,j}\right) -$$
$$- \sum_{j\in\Xi}\sum_{q\in\Xi} \frac{h_j h_q}{4}\left(N_{j,q,n}^{(+)} + N_{j,q,n}^{(-)}\right), \quad b_n^{(2)} = 0. \qquad (29)$$

В итоге, используя выражения (28), (29), запишем амплитуды первого и второго порядков малости в решении (17) для формы возмущенной поверхности капли:

$$
\begin{gathered}
M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = 0,\\
M_j^{(1)}(t) = \sum_{j\in\Xi} h_j \cos\left(\omega_j^+ t\right),\\
\omega_j^+ = \omega_j - \varepsilon\frac{L_{j,0}}{2\omega_j},\\
M_0^{(2)}(t) = -\sum_{j\in\Xi}\left[\frac{h_j^2}{(2j+1)}\left(\cos(\omega_j t)\right)^2 + \right.\\
\left. + \frac{2}{15}\beta_e h_j \delta_{j,2}\cos(\omega_j t)\right],\\
M_1^{(2)}(t) = -\sum_{j\in\Xi}\left[\frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)}\times\right.\\
\left.\times\cos(\omega_{j-1}t)\cos(\omega_j t) + \frac{9}{35}\beta_e h_j \delta_{j,3}\cos(\omega_j t)\right],\\
M_n^{(2)}(t) = \sum_{j\in\Xi} h_j\left[N_n^{(-)}\delta_{n-2,j}\cos(\omega_{n-2}t) + \right.\\
+ N_n^{(+)}\delta_{n+2,j}\cos\left(\omega_{n+2}t\right) -\\
\left. - \left(N_n^{(-)}\delta_{n-2,j} + N_n^{(+)}\delta_{n+2,j}\right)\cos(\omega_n t)\right] + \sum_{j\in\Xi}\sum_{q\in\Xi}\frac{h_j h_q}{2}\times\\
\times\left[N_{j,q,n}^{(+)}\left(\cos\left((\omega_j+\omega_q)t\right) - \cos(\omega_n t)\right) + \right.\\
\left. + N_{j,q,n}^{(-)}\left(\cos\left((\omega_j-\omega_q)t\right) - \cos(\omega_n t)\right)\right], \quad (n \ge 2).
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Таким образом, используя (2), (13), (17), получим аналитическое выражение, описывающее форму возмущенной поверхности незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, с точностью до слагаемых второго порядка малости в виде:

$$
\begin{gathered}
r(\theta,t) = 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) +\\
+ \varepsilon\sum_{j\in\Xi} M_j^{(1)}(t) P_j(\mu) + \varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu),
\end{gathered}
\tag{31}
$$

где амплитудные коэффициенты $M_n^{(m)}(t)$ определяются по (30).

6. Задача порядка 5/2 по ε. Для нахождения коэффициентов $F_n^{(5/2)}$ в решении (16) приведем систему уравнений, получающуюся из условий (8), (10) путем группировки слагаемых $\sim\varepsilon^{5/2}$:

$$
\begin{gathered}
r = 1:\\
\Phi^{(5/2)} + \left[\xi^{(1)} + \frac{1}{3}\beta_e P_2(\mu)\right]\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial r} +\\
+ 3\beta_E\left\{\left[(\xi^{(1)})^2 - \xi^{(2)}\right] + \beta_e\left[\frac{3}{5} - (P_1(\mu))^2\right]\xi^{(1)}\right\}\times\\
\times P_1(\mu) = \Phi_s^{(5/2)},\\
\int_0^{\pi}\left\{\frac{\partial\Phi^{(5/2)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial\theta}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta} + \right.\\
+ \left(2\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi^{(3/2)}}{\partial r^2}\right)\xi^{(1)} +\\
+ \frac{1}{3}\beta_e\left[\left(2\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi^{(3/2)}}{\partial r^2}\right)P_2(\mu) - \right.\\
- \frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial\theta}\frac{\partial P_2(\mu)}{\partial\theta} +\\
+ 3\beta_E\left(\left(\frac{6}{5}(4P_3(\mu) + P_1(\mu)) - P_1(\mu)\xi^{(1)}\right)\xi^{(1)} - \right.\\
\left.\left.\left. - 2P_2(\mu)\frac{\partial P_1(\mu)}{\partial\theta}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\right)\right]\right\}\sin\theta d\theta = 0.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Здесь $\Phi_s^{(5/2)}$ – поправка порядка малости 5/2 к величине потенциала поверхности капли.

Подставляя в (32) разложения (17) при $m = 1; 2$ и решение (16) при $k = 3/2; 5/2$, получим выражения для $F_n^{(5/2)}(T_0)$ в виде:

$$
\begin{gathered}
F_0^{(5/2)}(T_0) = 0,\\
\Phi_s^{(5/2)} = -6\beta_E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-2)}{(2n-1)(2n+1)}M_n^{(1)}(T_0,T_1)\times\right.\\
\left.\times M_{n-1}^{(1)}(T_0,T_1) + \frac{1}{35}\beta_e M_3^{(1)}(T_0,T_1)\right],\\
F_n^{(5/2)}(T_0) = \beta_E\times\\
\times\left\{3\left[\mu_{n-1}^+ M_{n-1}^{(2)}(T_0,T_1) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}^{(2)}(T_0,T_1)\right] + \right.\\
+ \beta_e\left[M_{n-3}^{(1)}(t)l_1(n) + M_{n-1}^{(1)}(t)l_2(n) + \right.\\
\left. + M_{n+1}^{(1)}(t)l_3(n) + M_{n+3}^{(1)}(t)l_4(n)\right] +\\
+ 3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}K_{m,k,n}M_k^{(1)}(T_0,T_1)\times\\
\left.\times\left[\mu_{m-1}^+ M_{m-1}^{(1)}(T_0,T_1) + \mu_{m+1}^- M_{m+1}^{(1)}(T_0,T_1)\right]\right\}, \quad (n \ge 1),
\end{gathered}
\tag{33}
$$

где числовые коэффициенты $l_1(n)$–$l_4(n)$, зависящие только от n, приводятся в приложении.

7. Поверхностная плотность заряда. Определим поверхностную плотность $\nu(\vec{r},t)$ индуцированных внешним электростатическим полем зарядов, распределенных по возмущенной поверхно-

сти нелинейно осциллирующей проводящей капли, по известной формуле:

$$\nu(\vec{r},t) = \left.\frac{E_n(\vec{r},t)}{4\pi}\right|_{r=r(\theta,t)} = \\ = -\frac{1}{4\pi}\left.\left(\vec{n}(\vec{r},t),\nabla\Phi(\vec{r},t)\right)\right|_{r=r(\theta,t)}, \tag{34}$$

где $r(\theta,t)$ определяется соотношением (30).

Подставляя в (34) разложение (13), с учетом (2), (14), а также вектор нормали к возмущенной поверхности капли в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых $\sim\varepsilon^{5/2}$:

$$\begin{aligned}\vec{n}(\vec{r},t) = &\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\beta_e\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\xi^{(1)}(\theta,t)}{\partial\theta}\right)^2\right]\vec{e}_r + \\ &+\left\{-\varepsilon\left(\beta_e\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\xi^{(1)}(\theta,t)}{\partial\theta}\right)+\right. \\ &+\varepsilon^2\left[\left(\xi^{(1)}(\theta,t)+\beta_e h(\theta)\right)\times\right. \\ &\left.\left.\times\left(\beta_e\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\xi^{(1)}(\theta,t)}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial\xi^{(2)}(\theta,t)}{\partial\theta}\right]\right\}\vec{e}_\theta,\end{aligned} \tag{35}$$

получим поверхностную плотность индуцированного заряда с точностью до слагаемых $\sim\varepsilon^{5/2}$:

$$\begin{aligned}\nu(\vec{r},t) = &\frac{1}{4\pi}\left\{3\beta_E\varepsilon^{1/2}P_1(\mu)+\varepsilon^{3/2}\times\right. \\ &\times\left[6\beta_E\left(\frac{1}{5}\beta_e P_3(\mu)-\xi^{(1)}P_1(\mu)\right)-\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial r}\right]+ \\ &+\varepsilon^{5/2}\left[-\frac{\partial\Phi^{(5/2)}}{\partial r}-6\beta_E\xi^{(2)}P_1(\mu)+\right. \\ &+\beta_E\beta_e\left(-\frac{2}{5}(P_1(\mu)+15P_3(\mu))\xi^{(1)}+\right. \\ &\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial\theta}\frac{\partial P_2(\mu)}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\Phi^{(3/2)}}{\partial r^2}P_2(\mu)\right)\right)+ \\ &+3\beta_E P_1(\mu)\left(4(\xi^{(1)})^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\right)^2\right)+ \\ &\left.\left.\left.+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi^{(3/2)}}{\partial\theta}-\xi^{(1)}\left(3\beta_E\frac{\partial P_1(\mu)}{\partial\theta}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\Phi^{(3/2)}}{\partial r^2}\right)\right]\right\}\right|_{r=1}.\end{aligned}$$

В (35) $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\theta$ – орты сферической системы координат.

Учитывая вид функций $\xi^{(1)}(\theta,t)$ и $\xi^{(2)}(\theta,t)$ из (31) и решение для поправок порядков 3/2 и 5/2 к электрическому потенциалу:

$$\begin{aligned}\Phi^{(3/2)}(\vec{r},t) = &3\beta_E\sum_{j\in\Xi}\left[\mu_{j-1}^{+}M_{j-1}^{(1)}(t)+\mu_{j+1}^{-}M_{j+1}^{(1)}(t)\right]\times \\ &\times r^{-(j+1)}P_j(\mu), \\ \Phi^{(5/2)}(\vec{r},t) = &\beta_E\sum_{n=0}^{\infty}\left[3\left(\mu_{n-1}^{+}M_{n-1}^{(2)}(t)+\mu_{n+1}^{-}M_{n+1}^{(2)}(t)\right)+\right. \\ &+3\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}K_{j,i,n}M_i^{(1)}(t)\times \\ &\left.\times\left(\mu_{j-1}^{+}M_{j-1}^{(1)}(t)+\mu_{j+1}^{-}M_{j+1}^{(1)}(t)\right)\right]\times \\ &\times r^{-(n+1)}P_n(\mu)+\beta_e\sum_{j\in\Xi}\left[M_{j-3}^{(1)}(t)l_1(j)+M_{j-1}^{(1)}(t)l_2(j)+\right. \\ &\left.+M_{j+1}^{(1)}(t)l_3(j)+M_{j+3}^{(1)}(t)l_4(j)\right]r^{-(j+1)}P_j(\mu)\end{aligned} \tag{36}$$

запишем поверхностную плотность заряда в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned}\nu(\vec{r},t) = &\frac{3}{4\pi}\beta_E\varepsilon^{1/2}\times \\ &\times\left\{P_1(\mu)+\varepsilon\left[\frac{2}{5}\beta_e P_3(\mu)+\right.\right. \\ &\left.+\sum_{j\in\Xi}\left(M_{j-1}^{(1)}(t)k_1(j)+M_{j+1}^{(1)}(t)k_2(j)\right)P_j(\mu)\right]+ \\ &+\varepsilon^2\left[\beta_e\sum_{j\in\Xi}\left[M_{j-3}^{(1)}(t)k_3(j)+M_{j-1}^{(1)}(t)k_4(j)+\right.\right. \\ &\left.+M_{j+1}^{(1)}(t)k_5(j)+M_{j-3}^{(1)}(t)k_6(j)\right]P_j(\mu)+ \\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left[M_{n-1}^{(2)}(t)k_1(n)+M_{n+1}^{(2)}(t)k_2(n)\right]+\right. \\ &+\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}K_{j,i,n}M_i^{(1)}(t)\times \\ &\left.\left.\left.\times\left[M_{j-1}^{(1)}(t)k_7(j,n)+M_{j+1}^{(1)}(t)k_8(j,n)\right]\right)P_n(\mu)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{37}$$

Числовые коэффициенты $k_1(j)$–$k_6(j)$, зависящие только от j, и $k_7(j,n)$, $k_8(j,n)$, зависящие от j и n, приводятся в приложении, чтобы не загромождать изложение тривиальными выражениями.

Из вида выражения (37) следует, что в отсутствии возмущения поверхностная плотность индуцированного заряда определяется двумя первыми слагаемыми в фигурных скобках.

8. Величины индуцированных зарядов. Величины разноименных индуцированных зарядов каждой из половинок возмущенной поверхности капли $r(\theta,t)$ определяются уравнениями:

$$q_{\pm}(\vec{r},t) = \int\limits_{S_{1,2}} dq_{\pm}(\vec{r},t) = \int\limits_{S_{1,2}} \nu(\vec{r},t)\, dS_{1,2} =$$
$$= \int\limits_{S_{1,2}} \frac{\nu(\vec{r},t)}{(\vec{n}(\vec{r},t),\vec{e}_r)} r^2 \Big|_{r=r(\theta,t)} \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{38}$$
$$S_1 \equiv \left[r = r(\theta,t);\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right],$$
$$S_2 \equiv \left[r = r(\theta,t);\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right].$$

Здесь q_+ – положительный и q_- – отрицательный индуцированные заряды, а $r(\theta,t)$ задано (30).

Разложение для индуцированного заряда ведется по полуцелым степеням параметра ε, поскольку $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. Таким образом, определим (38) с точностью до слагаемых $\sim\varepsilon^{5/2}$.

В силу симметрии распределения индуцированного заряда капли относительно экваториальной плоскости рассмотрим положительно заряженную половинку возмущенной сфероидальной капли S_1.

Подставляя в (38) поверхностную плотность заряда (37), вектор нормали (35) и форму возмущенной поверхности капли (31) и интегрируя полученное выражение по поверхности S_1, найдем величину положительного индуцированного заряда в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых $\sim\varepsilon^{5/2}$:

$$q_+(t) = \frac{3}{4}\beta_E \varepsilon^{1/2} \times$$
$$\times \left\{1 + \varepsilon\left(\frac{1}{15}\beta_e + 2\varepsilon\sum_{j\in\Xi} M_j^{(1)}(t) G_1(j)\right) + \right.$$
$$+ 2\varepsilon^2\left[\beta_e \sum_{j\in\Xi} M_j^{(1)}(t) G_2(j) + \right. \tag{39}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi} M_i^{(1)}(t)\left(M_{j-1}^{(1)}(t) L_1(j,i,n) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. + M_{j+1}^{(1)}(t) L_2(j,i,n)\right) + M_n^{(2)}(t) G_1(n)\right)\right]\right\},$$

где числовые коэффициенты $G_1(j)$, $G_2(j)$, зависящие только от j, и $L_1(j,i,n)$, $L_2(j,i,n)$, от j, i, n, в виду их громоздкости, приведены в приложении.

В итоге, учитывая выражения для амплитудных коэффициентов $M_j^{(1)}(t)$ и $M_n^{(2)}(t)$ из (30) и переходя от формальных параметров β_e, β_E физическим обозначениям, получим аналитическое выражение для разноименных индуцированных зарядов в размерном виде:

$$q_{\pm}(t) = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\pi\varepsilon_0} E_0 R^2 \left\{1 + \frac{1}{15}e^2 + 2\varepsilon\sum_{j\in\Xi} h_j \times \right.$$
$$\times\left[G_1(j)\cos\left(\omega_j^+ t\right) + e^2\left\{G_1^+(j)\cos(\omega_j t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + G_2^+(j)\cos\left(\omega_{j-2} t\right) + G_3^+(j)\cos\left(\omega_{j+2} t\right)\right\}\right] +$$
$$+ \varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}\left[S_1(j,i,n)\left\{\cos\left[\left(\omega_i + \omega_{j-1}\right)t\right] + \right.\right. \tag{40}$$
$$\left. + \cos\left[\left(\omega_i - \omega_{j-1}\right)t\right]\right\} + S_2(j,i,n) \times$$
$$\times\left\{\cos\left[\left(\omega_i + \omega_{j+1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i - \omega_{j+1}\right)t\right]\right\} +$$
$$+ S_3(j,i,n)\left\{\cos\left[\left(\omega_i + \omega_j\right)t\right] - \cos(\omega_n t)\right\} +$$
$$\left.\left. + S_4(j,i,n)\left\{\cos\left[\left(\omega_i - \omega_j\right)t\right] - \cos(\omega_n t)\right\}\right]\right\},$$

где q_- записан со знаком минус. Зависимость величины индуцированного в капле заряда от времени приведена на рис. 1а–б в размерном виде. Отметим, что в размерном виде будут представлены и все последующие графики.

Рисунки “а” и “б” рассчитаны для разных величин радиусов капли потому, что изменение радиуса приводит к заметным количественным изменениям рисунков, как по оси ординат, так и по оси абсцисс. На этот факт необходимо обратить внимание потому, что он влияет и ширину и на интенсивность излучения из реального облака.

Числовые (зависящие только от j) коэффициенты $G_1^+(j)$–$G_3^+(j)$, и коэффициенты $S_1(j,i,n)$–$S_4(j,i,n)$, зависящие помимо j, i, n от начальных амплитуд h_i, h_j, $h_{j\pm1}$, приведены в приложении.

На рис. 2а–б для иллюстрации приведена зависимость от времени t отклонения величины положительного индуцированного заряда капли $\Delta q_+(t)$ от его стационарного значения $q_+^{(\mathrm{eq})} = \frac{3}{2}\sqrt{\pi\varepsilon_0} E_0 R^2\left(1 + \frac{1}{15}e^2\right)$. Видно, что асимптотические расчеты второго порядка малости по ε приводят к незначительной нелинейной поправке к величине $q_+(t)$.

9. Модель осциллирующего диполя. Разноименным равным по величине индуцированным зарядам q_+ и q_- поставим в соответствие равновеликие точечные заряды (величина которых зависит от времени), разнесенные относительно друг друга

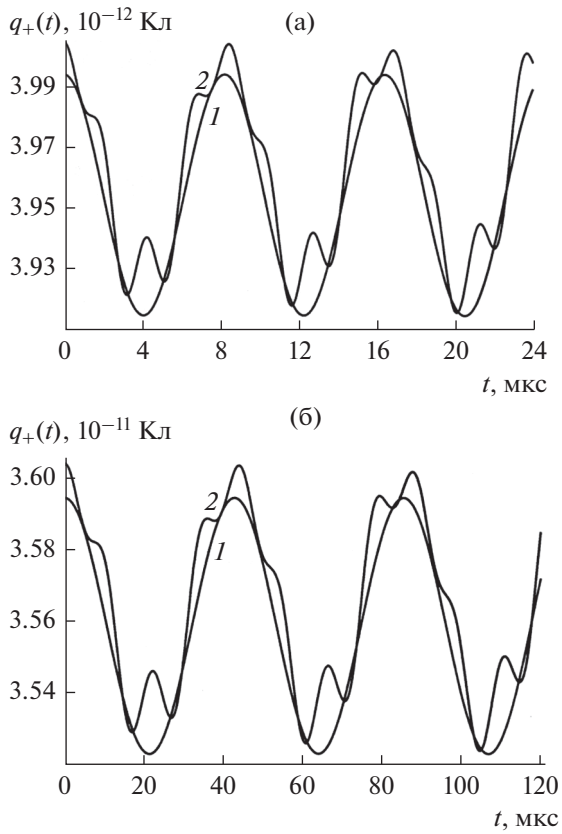

Рис. 1. Зависимость величины положительного индуцированного заряда капли $q_+(t)$ в электростатическом поле от времени t при начальном возбуждении равновесной формы поверхности капли возмущением вида $\varepsilon[P_2(\mu)+P_3(\mu)]/2$, $\sigma = 73\times10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $E_0 = 50$ В/см ($\sim 4\times10^{-4}E_{0\text{кр}}$). Кривая *1* соответствует линейным осцилляциям капли, кривая *2* – нелинейным осцилляциям. (а) $R = 10$ мкм, (б) $R = 30$ мкм.

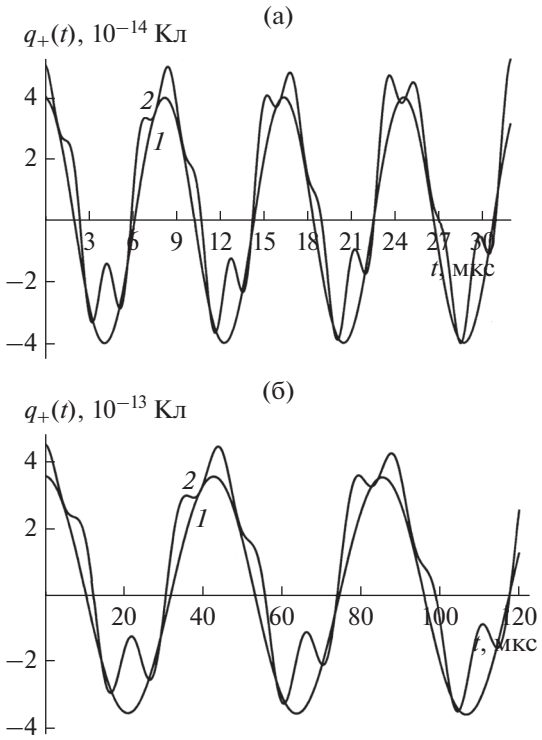

Рис. 2. Зависимость от времени t отклонения величины положительного индуцированного заряда капли $\Delta q_+(t)$ в электростатическом поле от его равновесной величины, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1. (а) $R = 10$ мкм, (б) $R = 30$ мкм.

на некоторое расстояние, меньшее диаметра капли. Эти заряды поместим на оси симметрии сфероида в положениях "эффективных" центров положительного и отрицательного зарядов, определенных соотношениями:

$$\vec{R}_{q_\pm}(t) = \frac{1}{q_\pm}\int\limits_{S_{1,2}} \vec{r}dq_\pm = \frac{1}{q_\pm}\int\limits_{S_{1,2}} r\vec{e}_r dq_\pm.$$

При капиллярных осцилляциях поверхности сфероида будет осциллировать величина "эффективного" индуцированного заряда и расстояние между центрами "эффективных" индуцированных зарядов. В результате получим "эффективный" диполь:

$$\vec{d}(t) = q_+(t)\left(\vec{R}_{q_+}(t) - \vec{R}_{q_-}(t)\right), \tag{41}$$

который будет осциллировать, и излучать при этом электромагнитные волны в соответствие с известным выражением [8, 9]:

$$I = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{d^2\vec{d}(t)}{dt^2}\right)^2. \tag{42}$$

В соответствие с (42) аналитическое выражение для интенсивности электромагнитного излучения единичной капли с учетом (41) легко выписать. Для этого необходимы лишь аналитические выражения для радиус-векторов смещения "эффективных" центров индуцированных зарядов сфероидальной капли $\vec{R}_{q_\pm}(t)$.

Заметим, что разложения для смещения центров разноименных индуцированных зарядов ведутся по целым степеням малого параметра ε, по-

этому дальнейшие расчеты $\vec{R}_{q_\pm}(t)$ проведем с точностью до слагаемых порядка $\sim\varepsilon^2$.

Для определения положения "эффективного" центра индуцированного заряда половинки капли учтем, что радиальный орт $\vec{e}_r$ сферической системы координат связан с ортами декартовой системы координат $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z\cos\theta. \quad (43)$$

Поскольку вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси z, то смещение центров разноименных индуцированных зарядов капли в плоскости x, y не происходит

$$R_{qx} = R_{qy} = 0.$$

Учитывая соотношение (43), определим проекцию вектора смещения центра положительного индуцированного заряда вдоль оси z в виде:

$$R_{qz}(\vec{r},t) = \frac{1}{q_+}\int\limits_{S_1}\frac{\nu(\vec{r},t)}{(\vec{n}(\vec{r},t),\vec{e}_r)}r^3\Big|_{r=r(\theta,t)}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Вычисляя интеграл по половинке сфероида S_1 с учетом (31), (35), (37) и подставляя в получившееся соотношение величину положительного индуцированного заряда из (39), определим R_{qz} в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых порядка $\sim\varepsilon^2$:

$$\begin{aligned}
R_{qz}(t) = \frac{2}{3}\Bigg\{1 + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\beta_e + \varepsilon\sum_{j\in\Xi}M_j^{(1)}(t)J_1(j)\right) + \\
+ \varepsilon^2\Bigg[\beta_e\sum_{j\in\Xi}M_j^{(1)}(t)\tilde{J}_2(j) + \\
+ \sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}M_i^{(1)}M_j^{(1)}\tilde{J}_3(j,i) + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(M_n^{(2)}(t)J_1(n) + \sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}M_i^{(1)}\Bigg[M_{j-2}^{(1)}(t)L_3(j,i,n) + \\
+ M_j^{(1)}(t)L_4(j,i,n) + M_{j+2}^{(1)}(t)L_5(j,i,n) + \\
+ M_{j-1}^{(1)}(t)\tilde{J}_4(j,i,n) + M_{j+1}^{(1)}(t)\tilde{J}_5(j,i,n)\Bigg]\Bigg)\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}$$

где числовые коэффициенты $J_1(j)$, $\tilde{J}_2(j)$, $\tilde{J}_3(j)$, зависящие от j, и $L_3(j,i,n)$–$L_5(j,i,n)$, $\tilde{J}_4(j,i,n)$, $\tilde{J}_5(j,i,n)$, зависящие от j, i, n, приведены в приложении.

Наконец, используя выражения для амплитуд $M_j^{(1)}(t)$ и $M_n^{(2)}(t)$ из (30) и переходя от формальных параметров β_e, β_E физическим обозначениям, определим положение "эффективного" центра положительного индуцированного заряда капли в размерном виде:

$$\begin{aligned}
R_{qz}(t) = \frac{2}{3}R\Bigg\{1 + \frac{1}{3}e^2 + \varepsilon\sum_{j\in\Xi}h_j\Big\{J_1(j)\cos\left(\omega_j^+ t\right) + \\
+ e^2\left[J_2(j)\cos(\omega_j t) + \right. \\
\left. + J_3(j)\cos\left(\omega_{j+2}t\right) + J_4(j)\cos\left(\omega_{j-2}t\right)\right]\Big\} + \\
+ \varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}\Big[J_5(j,i,n)\big(\cos\left[(\omega_i+\omega_j)t\right] + \\
+ \cos\left[(\omega_i-\omega_j)t\right]\big) + J_6(j,i,n)\times \\
\times\big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j-2}\right)t\right] + \\
+ \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j-2}\right)t\right]\big) + J_7(j,i,n)\times \\
\times\big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j+2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j+2}\right)t\right]\big) + \\
+ J_8(j,i,n)\big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j-1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j-1}\right)t\right]\big) + \\
+ J_9(j,i,n)\big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j+1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j+1}\right)t\right]\big) + \\
+ J_{10}(j,i,n)\big\{\cos\left[(\omega_i+\omega_j)t\right] - \cos(\omega_n t)\big\} + \\
+ J_{11}(j,i,n)\big\{\cos\left[(\omega_i-\omega_j)t\right] - \cos(\omega_n t)\big\}\Big]\Bigg\}.
\end{aligned} \quad (44)$$

Числовые коэффициенты $J_1(j)$–$J_4(j)$, зависящие только от j, и коэффициенты $J_5(j,i,n)$–$J_{11}(j,i,n)$, зависящие помимо j, i, n от начальных амплитуд h_i, h_j, $h_{j\pm1}$, $h_{j\pm2}$, в виду их чрезвычайной громоздкости приводятся в приложении.

На рис. 3а–3б для иллюстрации приведена зависимость смещения центра положительного индуцированного заряда капли $\Delta R_{qz}(t)$ от его стационарного равновесного положения $R_{qz}^{(\mathrm{eq})} = \frac{2}{3}R\left(1 + \frac{1}{3}e^2\right)$ от времени t. Несложно видеть, что нелинейная поправка к величине $R_{qz}(t)$, найденного в расчетах первого порядка малости, не дает существенный вклад в величину $R_{qz}(t)$.

Аналогичным образом для второй половинки сфероидальной капли найдем аналитическое выражение положения "эффективного" центра отрицательного индуцированного заряда в размерном виде:

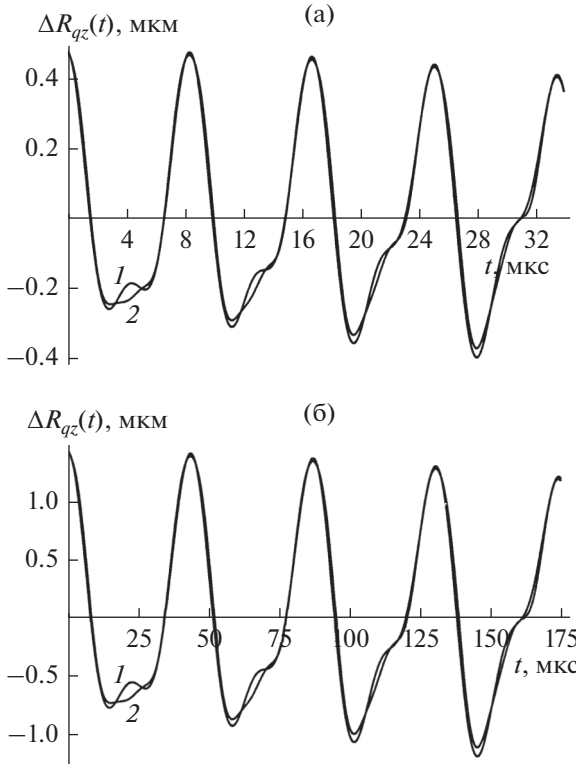

Рис. 3. Зависимость от времени t смещения центра положительного индуцированного заряда капли $\Delta R_{qz}(t)$ от равновесного значения, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая *1* соответствует $\Delta R_{qz}(t)$ при линейных осцилляциях капли, кривая *2* – при нелинейных осцилляциях. (а) $R = 10$ мкм, (б) $R = 30$ мкм.

$$
\begin{aligned}
R_{qz}^{-}(t) = -\frac{2}{3}R\Bigg\{1 + \frac{1}{3}e^2 + \varepsilon\sum_{j\in\Xi}h_j\Big\{J_1^*(j)\cos\left(\omega_j^+ t\right) + \\
+ e^2\Big[J_2^*(j)\cos(\omega_j t) + \\
+ J_3^*(j)\cos\left(\omega_{j+2}t\right) + J_4^*(j)\cos\left(\omega_{j-2}t\right)\Big]\Big\} + \\
+ \varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}\Big[J_5^*(j,i,n)\big(\cos[(\omega_i+\omega_j)t] + \\
+ \cos[(\omega_i-\omega_j)t]\big) + J_6^*(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j-2}\right)t\right] + \\
+ \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j-2}\right)t\right]\Big) + J_7^*(j,i,n)\times \qquad (45)\\
\times\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j+2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j+2}\right)t\right]\Big) + \\
+ J_8^*(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j-1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j-1}\right)t\right]\Big) + \\
+ J_9^*(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j+1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j+1}\right)t\right]\Big) + \\
+ J_{10}^*(j,i,n)\big\{\cos[(\omega_i+\omega_j)t] - \cos(\omega_n t)\big\} + \\
+ J_{11}^*(j,i,n)\big\{\cos[(\omega_i-\omega_j)t] - \cos(\omega_n t)\big\}\Big]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

где функция J_m^* в (44) отличается знаком от J_m лишь для нечетных значений изначально возбужденных колебательных мод j.

Подставляя (40), (44), (45) в (41), найдем проекцию вектора дипольного момента на ось z:

$$
\begin{aligned}
d_z(t) = \sqrt{\pi\varepsilon_0}E_0R^3\Bigg\{2\left(1+\frac{1}{3}e^2\right)\left(1+\frac{1}{15}e^2\right) + \\
+ \varepsilon\sum_{j\in\Xi}h_j\Big\{f_1(j)\cos\left(\omega_j^+ t\right) + \\
+ e^2\Big[f_2(j)\cos(\omega_j t) + f_3(j)\cos\left(\omega_{j+2}t\right) + \\
+ f_4(j)\cos\left(\omega_{j-2}t\right)\Big]\Big\} + \\
+ \varepsilon^2\Bigg\{\sum_{i\in\Xi}\sum_{j\in\Xi}h_jh_if_5(j,i)\cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t) + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}\Big[f_6(j,i,n)\big(\cos[(\omega_i+\omega_j)t] + \\
+ \cos[(\omega_i-\omega_j)t]\big) + \\
+ f_7(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j-2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j-2}\right)t\right]\Big) + \\
+ f_8(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j+2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j+2}\right)t\right]\Big) + \\
+ f_9(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j-1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j-1}\right)t\right]\Big) + \\
+ f_{10}(j,i,n)\Big(\cos\left[\left(\omega_i+\omega_{j+1}\right)t\right] + \cos\left[\left(\omega_i-\omega_{j+1}\right)t\right]\Big) + \\
+ f_{11}(j,i,n)\big(\cos[(\omega_i+\omega_j)t] - \cos(\omega_n t)\big) + \\
+ f_{12}(j,i,n)\big(\cos[(\omega_i-\omega_j)t] - \cos(\omega_n t)\big)\Big]\Bigg\}\Bigg\}, \qquad (46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(j) = J_1(j) + J_1^*(j) + 4G_1(j), \\
f_2(j) = \frac{1}{15}\Big(J_1(j) + J_1^*(j)\Big) + \\
+ J_2(j) + J_2^*(j) + 4G_1^+(j) + \frac{4}{3}G_1(j), \\
f_3(j) = J_4(j) + J_4^*(j) + 4G_2^+(j), \\
f_4(j) = J_3(j) + J_3^*(j) + 4G_3^+(j), \\
f_5(j,i) = 2G_1(i)(J_1(j) + J_1^*(j)), \\
f_6(j,i) = J_5(j,i,n) + J_5^*(j,i,n), \\
f_7(j,i,n) = J_6(j,i,n) + J_6^*(j,i,n), \\
f_8(j,i,n) = J_7(j,i,n) + J_7^*(j,i,n), \\
f_9(j,i,n) = J_8(j,i,n) + J_8^*(j,i,n) + 2S_1, \\
f_{10}(j,i,n) = J_9(j,i,n) + J_9^*(j,i,n) + 2S_2, \\
f_{11}(j,i,n) = J_{10}(j,i,n) + J_{10}^*(j,i,n) + 2S_3, \\
f_{12}(j,i,n) = J_{11}(j,i,n) + J_{11}^*(j,i,n) + 2S_4.
\end{aligned}
$$

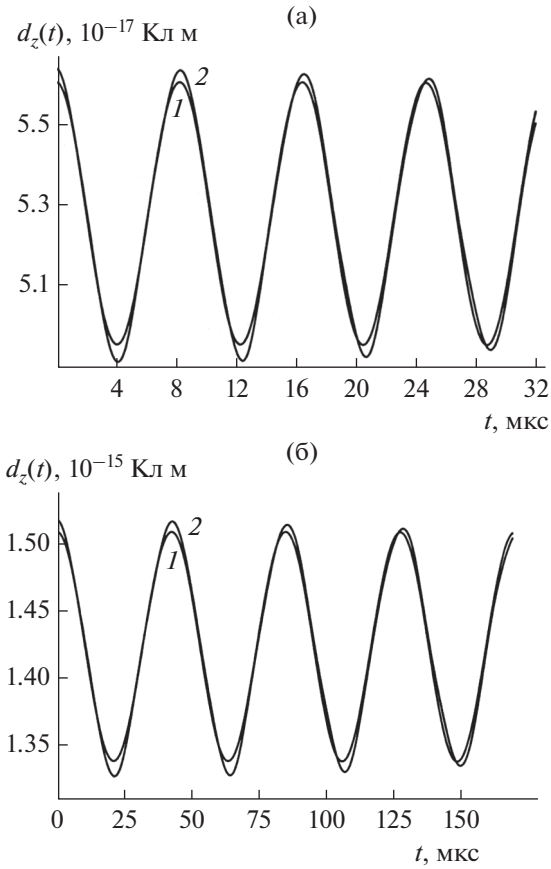

Рис. 4. Зависимость от времени t величины проекции $d_z(t)$ дипольного момента на ось z, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая *1* соответствует $d_z(t)$ при линейных осцилляциях капли, кривая *2* – при нелинейных осцилляциях. (а) $R = 10$ мкм, (б) $R = 30$ мкм.

На рис. 4а–4б приведена зависимость от времени t проекции $d_z(t)$ дипольного момента на ось z. Видно, что нелинейные осцилляции капли дают небольшую поправку к величине $d_z(t)$, связанной с линейными осцилляциями капли.

В частности, из рис. 5 несложно видеть, что поправка второго порядка малости по ε к величине стационарного значения $d_z^{(\mathrm{eq})} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}E_0R^3 \times \left(1+\frac{1}{3}e^2\right)\left(1+\frac{1}{15}e^2\right)$ в (46) определяется более высокими частотами, чем поправка первого порядка малости.

На рис. 6 и рис. 7 приведены зависимости частот осцилляций капли для линейной и нелинейной поправок к величине $d_z^{(\mathrm{eq})}$ от радиуса капли. Видно, что с ростом размера капли частоты ее осцилляций убывают по примерно гиперболическому закону.

На основе (42) с учетом (46), заменяя в функциях косинусы и синусы на их максимальные значения, для проводимого качественного анализа, получим аналитическое выражение для интенсивности дипольного излучения нелинейно осциллирующей незаряженной капли во внешнем электростатическом поле в размерном виде:

$$
\begin{aligned}
I = {} & \frac{2\pi\varepsilon_0}{3c^3}E_0^2R^6\Bigg\{\varepsilon\sum_{j\in\Xi}h_j\Big[f_1(j)\omega_j^{+2} + \\
& + e^2\left\{f_2(j)\omega_j^2 + f_3(j)\omega_{j+2}^2 + f_4(j)\omega_{j-2}^2\right\}\Big] + \\
& + \varepsilon^2\Bigg\{2\sum_{i\in\Xi}\sum_{j\in\Xi}h_jh_if_5(j,i)\omega_i\omega_j + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Xi}\sum_{i\in\Xi}\Big[f_6(j,i,n)\left\{(\omega_i+\omega_j)^2 + (\omega_i-\omega_j)^2\right\} + \\
& + f_7(j,i,n)\left\{(\omega_i+\omega_{j-2})^2 + (\omega_i-\omega_{j-2})^2\right\} + \\
& + f_8(j,i,n)\left\{(\omega_i+\omega_{j+2})^2 + (\omega_i-\omega_{j+2})^2\right\} + \\
& + f_9(j,i,n)\left\{(\omega_i+\omega_{j-1})^2 + (\omega_i-\omega_{j-1})^2\right\} + \\
& + f_{10}(j,i,n)\left\{(\omega_i+\omega_{j+1})^2 + (\omega_i-\omega_{j+1})^2\right\} + \\
& + f_{11}(j,i,n)\left\{(\omega_i+\omega_j)^2 + \omega_n^2\right\} + \\
& + f_{12}(j,i,n)\left\{(\omega_i-\omega_j)^2 - \omega_n^2\right\}\Big]\Bigg\}\Bigg\}^2.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Из (47) можно оценить величину интенсивности фонового шумового электромагнитного излучения от различных жидко-капельных систем искусственного и естественного происхождения, например таких, как конвективные облака.

Осцилляции большой амплитуды облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие в результате процессов столкновения или в результате реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натурных наблюдений [25, 26], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. При нижеследующих оценках будем принимать безразмерную амплитуду осцилляций ε равную 0.1. Величина параметра Тейлора $w = 4\pi\varepsilon_0 E_0^2 R/\sigma$ для капель в существующих в грозовых облаках электростатических полях [18] много меньше критического значения параметра $w_{\text{кр}}$ [4], т.е. большая часть облачных капель находится весьма далеко от предела неустойчивости по отношению к индуцированному заряду.

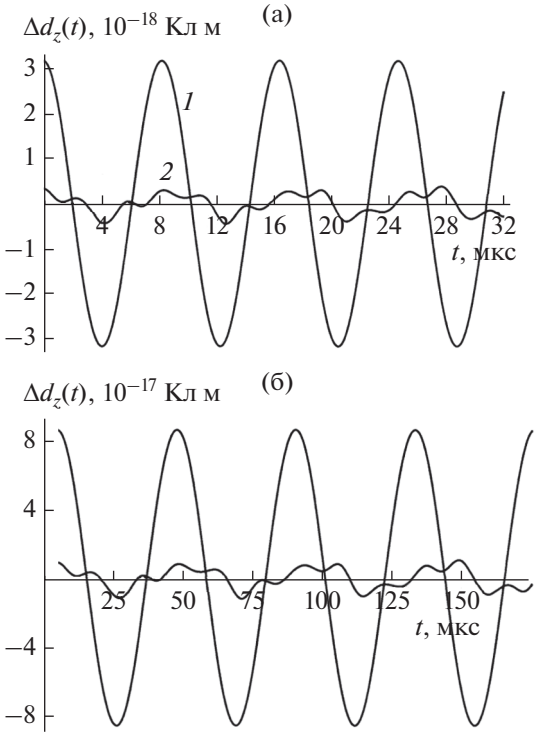

Рис. 5. Зависимость от времени t поправки $\Delta d_z(t)$ к величине стационарного значения проекции дипольного момента на ось z, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая *1* – поправка $\Delta d_z(t)$ первого порядка малости по ε, кривая *2* – $\Delta d_z(t)$ второго порядка малости по ε. (а) $R = 10$ мкм, (б) $R = 30$ мкм.

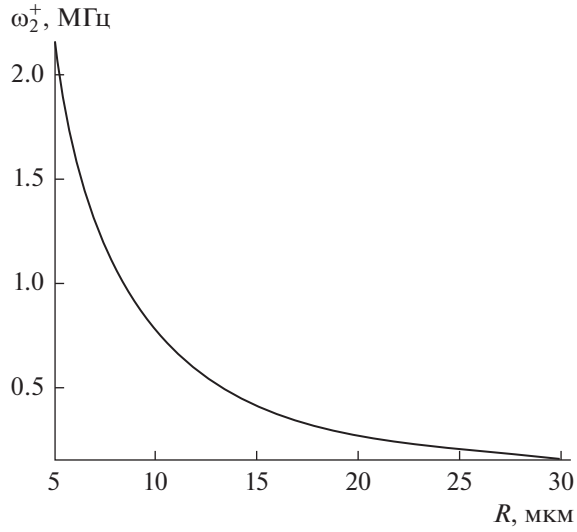

Рис. 6. Зависимость от радиуса капли частоты ее осцилляций ω_2^+ для поправки первого порядка малости по ε к $d_z^{(\text{eq})}$, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1.

На рис. 8 приведена рассчитанная по (47) зависимость интенсивности излучения I от величины напряженности внешнего электрического поля E_0.

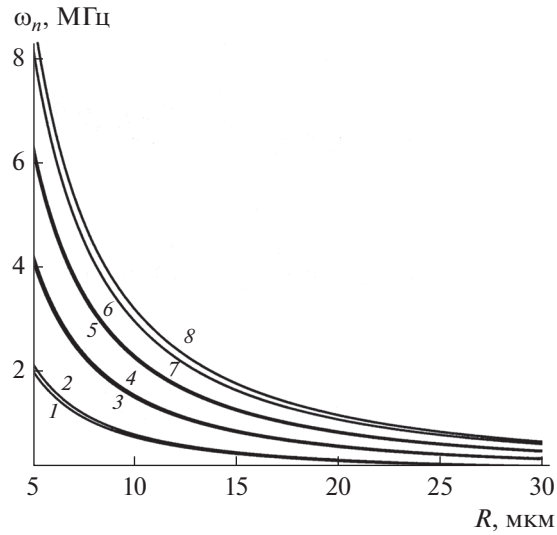

Рис. 7. Зависимость от радиуса капли частот ее осцилляций ω_n для поправки второго порядка малости по ε к величине стационарного значения $d_z^{(\text{eq})}$, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая *1* соответствует частоте осцилляций капли $\omega_3 - \omega_2$, кривая *2* – ω_2, кривая *3* – ω_3, кривая *4* – $2\omega_2$, кривая *5* – ω_4, кривая *6* – $\omega_2 + \omega_3$, кривая *7* – $2\omega_3$, кривая *8* – ω_5.

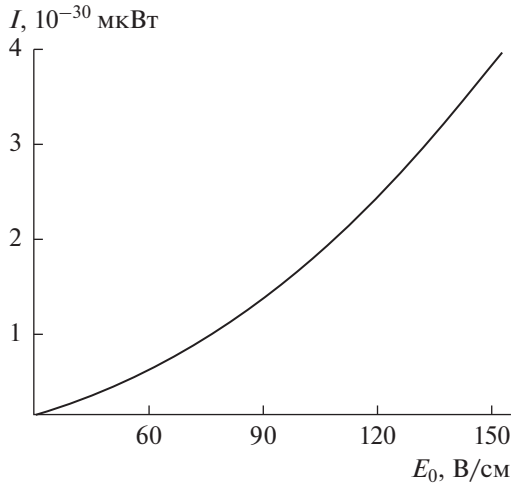

Рис. 8. Зависимость интенсивности I дипольного электромагнитного излучения нелинейно осциллирующей незаряженной капли в однородном электростатическом поле от величины напряженности внешнего электростатического поля, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1.

Видно, что с увеличением E_0 интенсивность излучения быстро увеличивается.

Рис. 9 иллюстрирует зависимость I от радиуса капли R. Видно, что она весьма слаба.

Зависимость интенсивности излучения I от времени t, рассчитанная при фиксированных значениях R и E_0 по точному выражению (42) с

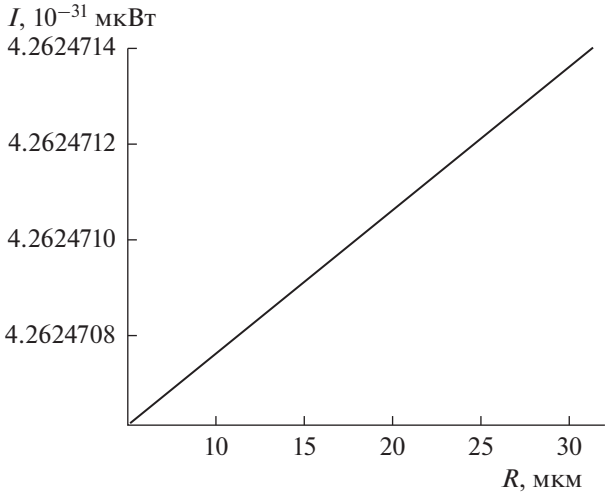

Рис. 9. Зависимость интенсивности I дипольного электромагнитного излучения нелинейно осциллирующей незаряженной капли в однородном электростатическом поле от радиуса капли, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1.

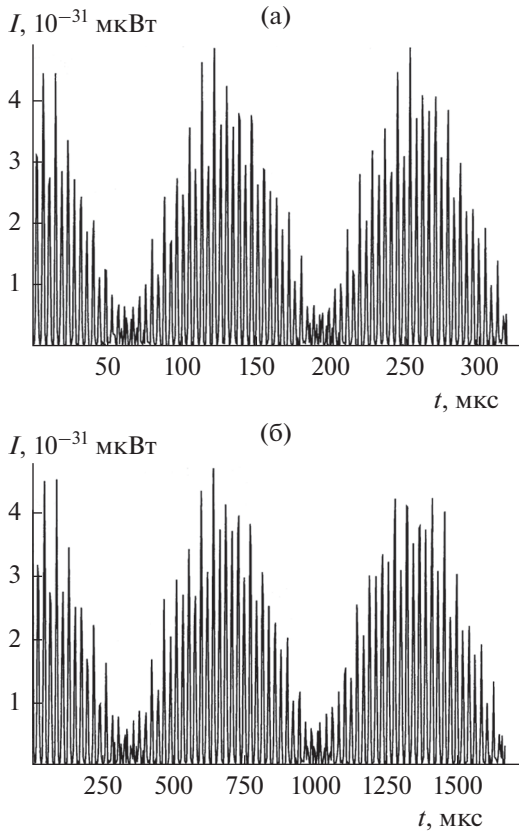

Рис. 10. Зависимость интенсивности дипольного электромагнитного излучения нелинейно осциллирующей в однородном электростатическом поле незаряженной капли от времени t, рассчитанная по (42) с учетом (40), (46) и тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1. (а) $R = 10$ мкм, (б) $R = 30$ мкм.

учетом (40), (46) (без замены косинусов и синусов на их максимальные значения) показана на рис. 10а–10б.

Масштаб изменения времени, принятый на рис. 10, весьма велик, и трудно угадать форму отдельных зубцов. В этой связи на рис. 11а–11б приведена форма отдельных зубцов из начала рис. 10 (в самой левой его части).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дипольное электромагнитное излучение незаряженной капли во внешнем электростатическом поле обуславливается неравномерным изменением во времени величины ее индуцированного внешним электростатическим полем осциллирующего дипольного момента. Квадратичные расчеты интенсивности дипольного излучения, выполненные на основе метода многих масштабов, показали их качественное сходство с ранее иссле-

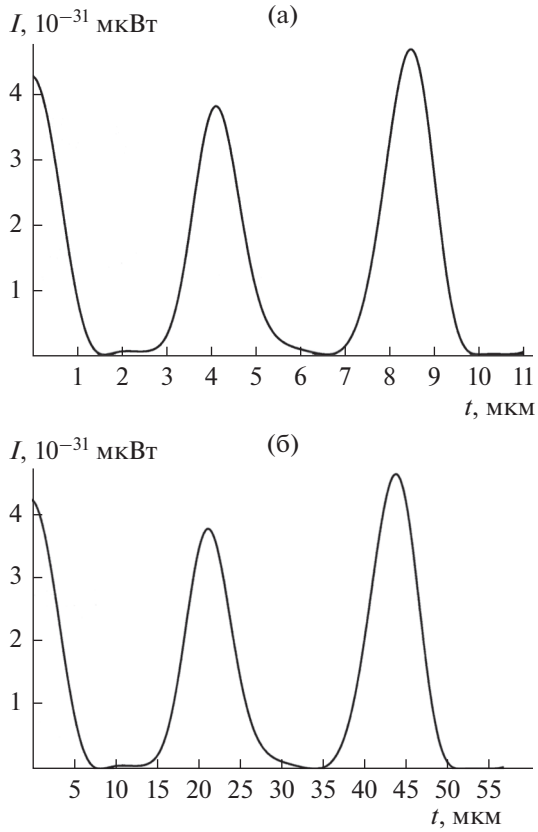

Рис. 11. Зависимость интенсивности I дипольного электромагнитного излучения нелинейно осциллирующей в однородном электростатическом поле незаряженной капли от времени t, рассчитанного при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1, для первых трех пиков на рис. 10.

дованным дипольным излучением от осциллирующей заряженной капли и некоторое количественное различие [14]. Оказалось, что частота квадратичных поправок к частотам для капли в электростатическом поле в несколько раз выше частоты линейных осцилляций, также как и для заряженной капли. Но зависимость интенсивности электромагнитного излучения от радиуса капли, осциллирующей в электростатическом поле, во много раз слабее, чем от осциллирующей заряженной капли. Исследование временной эволюции интенсивности электромагнитного излучения от единичной капли показало, что излучение имеет вид “биений” – серии пакетов, составленных из элементарных (несущих) волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. Часть вторая. М.: Наука, 1996.
2. *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348.
3. *O'Konski C.J., Thacher H.C.* // J. Phys. Chem. 1953. V. 57. P. 955.
4. *Taylor G.I.* // Proc. Roy. Soc., London. 1964. V. A280. P. 383.
5. *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344.
6. *Богатов Н.А.* // Сборник тез. докл. VI Международной конференции ”Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений“. Петропавловск-Камчатский: ДВО РАН, 2013. С. 10.
7. *Shiryaeva S.O., Grigoriev A.I., Kolbneva N.Yu.* // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. 2016. V. 52. № 2. P.162.
8. *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Физматгиз, 1969.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1973.
10. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю.* Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва–Берлин: Изд. Директ-Медиа, 2021.
11. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990.
12. *Белоцерковский А.В., Дивинский Л.И.* Активно-пассивная радиолокация грозовых и грозоопасных

очагов в облаках / Под ред. Качурина Л.Г. и Дивинского Л.И. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.

13. *Горелик А.Г., Козлов А.И., Стерлядкин В.В.* // Научный вестник МГТУ ГА. 2012. № 176. С. 25.
14. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 62.
15. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 70.
16. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989 Т. 59. № 6. С. 27.
17. *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983.
18. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, 1989.
19. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
20. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948.
21. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
24. *Лагалли М.* Векторное исчисление в применении к математической физике. М.: Изд. URSS, 2010.
25. *Beard K.V., Tokay A.A.* // Geophysical Research Letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257.
26. *Стерлядкин В.В.* // Известия АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С.613.
27. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для коэффициентов $l_1(n)$–$l_4(n)$ в (33):

$$l_1(n) = \frac{3n(n-2)(n-1)(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)},$$

$$l_2(n) = \frac{n\left(50n^4 + n^3 - 103n^2 + 39n - 27\right)}{10(4n^2-9)(2n-1)^2},$$

$$l_3(n) = \frac{n(n+1)\left(50n^4 + 321n^3 + 621n^2 + 278n - 180\right)}{10(4n^2+8n-5)(2n+3)^2},$$

$$l_4(n) = \frac{3(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)}{2(2n+7)(2n+5)(2n+3)}.$$

Выражения для коэффициентов $k_1(j)$–$k_6(j)$, $k_7(j,n)$, $k_8(j,n)$ в (37):

$$k_1(j) = \frac{j(j-1)}{(2j-1)}, \quad k_2(j) = \frac{(j+1)(j-1)}{(2j+3)}, \quad k_3(j) = -\frac{j(j-1)(j-2)\left(2j^2+3j+7\right)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)},$$

$$k_4(j) = -\frac{j\left(100j^5 + 116j^4 - 165j^3 - 205j^2 + 75j - 81\right)}{30(2j-1)^2(2j-3)(2j+3)},$$

$$k_5(j) = -\frac{(j+1)\left(100j^5 + 756j^4 + 2159j^3 + 2591j^2 + 704j - 600\right)}{30(2j-1)(2j+3)^2(2j+5)},$$

$$k_6(j) = -\frac{(j+1)(j+2)(j+3)\left(2j^2+11j+21\right)}{2(2j+3)(2j+5)(2j+7)},$$

$$k_7(j,n) = -\frac{j\left(j^2+j-jn-1\right)}{(2j-1)}, \quad k_8(j,n) = -\frac{j(j+1)(j-n+3)}{(2j+3)}.$$

Выражения для коэффициентов $G_1(j)$, $G_2(j)$, $L_1(j,i,n)$, $L_2(j,i,n)$ в (39):

$$G_1(j) = p_1 F_{j-1} + p_2 F_{j+1},$$

$$p_1 = \frac{j^2}{(2j+1)}, \quad p_2 = \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)},$$

$$G_2(j) = q_1 F_{j-3} + q_2 F_{j-1} + q_3 F_{j+1} + q_4 F_{j+3},$$

$$q_1 = \frac{5j(j-1)(j-2)^2}{2(2j+1)(2j-3)(2j-1)},$$

$$q_2 = \frac{j^2\left(146j^3 + 73j^2 - 246j - 153\right)}{30(2j-3)(2j+1)^2(2j+3)},$$

$$q_3 = \frac{(j+1)(j+2)\left(26j^3 + 65j^2 + 46j - 20\right)}{30(2j-1)(2j+1)^2(2j+5)},$$

$$q_4 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{2(2j+1)(2j+3)(2j+5)},$$

$$L_1(j,i,n) = \frac{j}{(2j-1)}\left(j(n+1-j)K_{j,i,n} + \alpha_{j,i,n}\right)F_n,$$

$$L_2(j,i,n) = \frac{(j+1)}{(2j+3)} \times$$

$$\times \left(\left(-(j+1)^2 + j(n+1)\right)K_{j,i,n} + \alpha_{j,i,n}\right)F_n,$$

$$F_j = \int_0^{\pi/2} P_j(\mu)\sin\theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} 1 & (j=0) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}(j-1)!}{2^{j-1}(j+1)\left(\left(\frac{j-1}{2}\right)!\right)^2} & (j=2k+1) \\ 0 & (j=2k), \end{cases}$$

Выражения для коэффициентов $G_1^+(j)$–$G_3^+(j)$, $S_1(j,i,n)$–$S_4(j,i,n)$ в (40):

$$G_1^+(j) = p_1^+ F_{j-3} + p_2^+ F_{j-1} + p_3^+ F_{j+1} + p_4^+ F_{j+3},$$

$$p_1^+ = -\frac{3(j-1)(j-2)^2(j^3 - 7j^2 + 4j + 4)}{4(2j-3)(2j-1)(2j+1)(3j-4)},$$

$$p_2^+ = -\frac{j\left(180j^7 - 1212j^6 + 251j^5 + 2985j^4 + 25j^3 - 3453j^2 + 324j + 540\right)}{60(2j-3)(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)(3j-4)},$$

$$p_3^+ = \frac{(j+1)(j+2)\left(180j^6 + 1572j^5 + 4771j^4 + 6319j^3 + 2816j^2 - 988j - 720\right)}{60(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)(2j+5)(3j+2)},$$

$$p_4^+ = \frac{3(j+1)^2(j+2)(j+3)(j+4)^2}{4(2j+1)(2j+3)(2j+5)(3j+2)},$$

$$G_2^+(j) = q_1^+ F_{j-1} + q_2^+ F_{j-3},$$
$$q_1^+ = \frac{j(j-1)^2\left(3j^3+9j^2-28j+12\right)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)},$$
$$q_2^+ = \frac{(j-1)(j-2)^2\left(3j^3+9j^2-28j+12\right)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)},$$
$$G_3^+(j) = -\left(m_1^+ F_{j+3} + m_2^+ F_{j+1}\right),$$

$$m_1^+ = \frac{(j+1)(j+2)(j+4)(j+3)(3j^2+9j+8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)},$$
$$m_2^+ = \frac{(j+1)(j+2)^3(3j^2+9j+8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)},$$
$$S_1(j,i,n) = h_i h_{j-1} L_1(j,i,n), \quad S_2(j,i,n) = h_i h_{j+1} L_2(j,i,n),$$
$$S_3(j,i,n) = h_i h_j N_{j,q,n}^{(+)} G_1(n), \quad S_4(j,i,n) = h_i h_j N_{j,q,n}^{(-)} G_1(n).$$

Выражения для коэффициентов $J_1(j)$, $\tilde{J}_2(j)$, $\tilde{J}_3(j)$, $L_3(j,i,n)$–$L_5(j,i,n)$, $\tilde{J}_4(j,i,n)$, $\tilde{J}_5(j,i,n)$ в (44):

$$J_1(j) = 3G_3(j) - 2G_1(j),$$
$$\tilde{J}_2(j) = -\left(\frac{8}{15}G_1(j) + 2G_2(j) + \frac{1}{5}G_3(j) - 3G_4(j)\right), \quad \tilde{J}_3(j,i) = -2G_1(i)J_1(j),$$
$$G_3(j) = m_1 F_{j-2} + m_2 F_j + m_3 F_{j+2},$$
$$m_1 = \frac{j(j-1)(j+1)}{(2j-1)(2j+1)}, \quad m_2 = \frac{(j+1)\left(4j^3+10j^2+2j-3\right)}{(2j+1)(2j-1)(2j+3)},$$
$$m_3 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{(2j+1)(2j+3)},$$
$$G_4(j) = k_1^+ F_{j-4} + k_2^+ F_{j-2} + k_3^+ F_j + k_4^+ F_{j+2} + k_5^+ F_{j+4}.$$

$$k_1^+ = \frac{3j(j-1)^2(j-2)(j-3)}{2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)},$$
$$k_2^+ = \frac{j(j-1)\left(376j^5-736j^4-1198j^3+154j^2+777j-45\right)}{15(2j+1)^2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+3)},$$
$$k_3^+ = \frac{2(j+1)\left(136j^6+484j^5+106j^4-925j^3-809j^2-66j+90\right)}{15(2j+1)^2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+3)},$$
$$k_4^+ = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)\left(136j^4+936j^3+1606j^2+36j-365\right)}{15(2j+1)^2(2j+7)(2j+5)(2j+3)(2j-1)},$$
$$k_5^+ = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)}{(2j+7)(2j+5)(2j+3)(2j+1)},$$
$$L_3(j,i,n) = \frac{3(j-1)}{(2j-1)(2j-3)}\left(-j\left(j^2-3j+1\right)K_{j,i,n} + (j-1)\alpha_{j,i,n}\right)F_n,$$

$$L_4(j,i,n)=\frac{1}{(2j-1)(2j+3)}\left(-\frac{3\left(4j^5+6j^4-2j^3-4j^2-j+1\right)}{(2j+1)}K_{j,i,n}+j\left(4j^2-7\right)\alpha_{j,i,n}\right)F_n,$$

$$L_5(j,i,n)=-\frac{(j+2)}{(2j+3)(2j+5)}\left(\left(3j^2+10j+9\right)K_{j,i,n}+(j+3)\alpha_{j,i,n}\right)F_n,$$

$$\tilde{J}_4(j,i,n)=3L_6(j,i,n)-2L_1(j,i,n),$$

$$L_6(j,i,n)=\frac{j^2}{(2j-1)}\left(\frac{j^2}{(2j-1)}K_{j,i,n-1}+\frac{(j+1)(j+2)}{(2j+3)}K_{j,i,n+1}\right)F_n,$$

$$\tilde{J}_5(j,i,n)=3L_7(j,i,n)-2L_2(j,i,n),$$

$$L_7(j,i,n)=\frac{j(j+1)}{(2j+3)}\left(\frac{j^2}{(2j-1)}K_{j,i,n-1}+\frac{(j+1)(j+2)}{(2j+3)}K_{j,i,n+1}\right)F_n.$$

Выражения для коэффициентов $J_1(j)$–$J_4(j)$, $J_5(j,i,n)$–$J_{11}(j,i,n)$ в (44):

$$J_2(j)=-\frac{8}{15}G_1(j)-\frac{1}{5}G_3(j)-2G_1^+(j)+3G_1^-(j),$$

$$J_3(j)=-\left(2G_3^+(j)+3G_3^-(j)\right),\quad J_4(j)=3G_2^-(j)-2G_2^+(j),$$

$$G_1^-(j)=p_1^-F_{j-4}+p_2^-F_{j-2}+p_3^-F_j+p_4^-F_{j+2}+p_5^-F_{j+4},$$

$$p_1^-=-\frac{3(j-1)^2(j-2)(j-3)\left(3j^3-27j^2+20j+12\right)}{4(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)(3j-4)},$$

$$p_2^-=-\frac{(j-1)}{60(2j-5)(2j-3)(2j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)(3j-4)}\times$$
$$\times(720j^9-8664j^8+20468j^7+9762j^6-56530j^5+$$
$$+17109j^4+25712j^3-837j^2-4320j-540),$$

$$p_3^-=\frac{(j+1)}{30(2j-3)(2j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)^2(3j-4)(3j+2)}\times$$
$$\times\left(19584j^{10}+84144j^9+17104j^8-327136j^7-329116j^6+317277j^5+\right.$$
$$\left.+517866j^4+9421j^3-176508j^2-19116j+17280\right),$$

$$p_4^-=\frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{60(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)^2(2j+5)(2j+7)(3j+2)}\times$$
$$\times\left(720j^7+11544j^6+65836j^5+166470j^4\right.$$
$$\left.+180340j^3+47181j^2-38771j-17520\right),$$

$$p_5^-=\frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)\left(3j^2+21j+16\right)}{4(2j+1)(2j+3)(2j+5)(2j+7)(3j+2)},$$

$$G_2^-(j)=q_1^-F_j+q_2^-F_{j-2}+q_3^-F_{j-4},$$

$$q_1^-=\frac{j(j-1)^2(j+1)\left(3j^3+9j^2-28j+12\right)}{4(2j-1)^2(2j+1)(3j-4)(2j-3)},$$

$$q_2^- = \frac{(j-1)^2\left(3j^3+9j^2-28j+12\right)\left(4j^3-14j^2+10j+1\right)}{4(2j-1)^2(2j+1)(3j-4)(2j-3)(2j-5)},$$

$$q_3^- = \frac{(j-1)^2(j-2)(j-3)\left(3j^3+9j^2-28j+12\right)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)(2j-5)},$$

$$G_3^-(j) = m_1^- F_{j+4} + m_2^- F_{j+2} + m_3^- F_j,$$

$$m_1^- = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)\left(3j^2+9j+8\right)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)(2j+7)},$$

$$m_2^- = \frac{(j+3)(j+1)(j+2)\left(4j^3+34j^2+90j+73\right)\left(3j^2+9j+8\right)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)(2j+7)},$$

$$m_3^- = \frac{(j+1)^2(j+2)^2(j+3)\left(3j^2+9j+8\right)}{4(2j+1)(2j+3)^2(3j+2)(2j+5)},$$

$$-K_1(i)J_1^*(j),$$

$$J_5(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_j\left(-G_1(i)J_1(j) + \frac{1}{2}L_4(j,i,n)\right),$$

$$J_6(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_{j-2}L_3(j,i,n), \quad J_7(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_{j+2}L_5(j,i,n),$$

$$J_8(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_{j-1}\left(3L_6(j,i,n) - 2L_1(j,i,n)\right),$$

$$J_9(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_{j+1}\left(3L_7(j,i,n) - 2L_2(j,i,n)\right),$$

$$J_{10}(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_j N_{j,q,n}^{(+)} J_1(n), \quad J_{11}(j,i,n) = \frac{1}{2}h_i h_j N_{j,q,n}^{(-)} J_1(n).$$

Выражения для коэффициентов $J_1^*(j)$–$J_4^*(j)$, $J_5^*(j,i,n)$–$J_{11}^*(j,i,n)$ в (45):

$$J_1^*(j) = 2K_1(j) + 3K_3(j),$$

$$K_1(j) = (-1)^{j-1} p_1 F_{j-1} + (-1)^{j+1} p_2 F_{j+1},$$

$$K_3(j) = (-1)^{j-2} m_1 F_{j-2} + (-1)^{j} m_2 F_j + (-1)^{j+2} m_3 F_{j+2},$$

$$J_2^*(j) = \frac{8}{15}K_1(j) - \frac{1}{5}K_3(j) + 2K_1^+(j) + 3K_1^-(j),$$

$$K_1^+(j) = (-1)^{j-3} p_1^+ F_{j-3} + (-1)^{j-1} p_2^+ F_{j-1} + (-1)^{j+1} p_3^+ F_{j+1} + (-1)^{j+3} p_4^+ F_{j+3},$$

$$K_1^-(j) = (-1)^{j-4} p_1^- F_{j-4} + (-1)^{j-2} p_2^- F_{j-2} + (-1)^{j} p_3^- F_j + (-1)^{j+2} p_4^- F_{j+2} + (-1)^{j+4} p_5^- F_{j+4},$$

$$J_3^*(j) = -\left(2K_3^+(j) + 3K_3^-(j)\right),$$

$$K_3^+(j) = (-1)^{j+3} m_1^+ F_{j+3} + (-1)^{j+1} m_2^+ F_{j+1},$$

$$K_3^-(j) = (-1)^{j+4} m_1^- F_{j+4} + (-1)^{j+2} m_2^- F_{j+2} + (-1)^{j} m_3^- F_j,$$

$$J_4^*(j) = 2K_2^+(j) + 3K_2^-(j),$$

$$K_2^+(j) = (-1)^{j-1} q_1^+ F_{j-1} + (-1)^{j+1} q_2^+ F_{j-3},$$

$$K_2^-(j) = (-1)^{j} q_1^- F_j + (-1)^{j-2} q_2^- F_{j-2} + (-1)^{j-4} q_3^- F_{j-4},$$

$$J_5^*(j,i,n) = h_i h_j \times \left(-K_1(i)J_1^*(j) + \frac{1}{2}L_4(j,i,n)(-1)^n F_n\right),$$

$$J_6^*(j,i,n) = \frac{1}{2} h_i h_{j-2} L_3(j,i,n)(-1)^n F_n,$$

$$J_7^*(j,i,n) = \frac{1}{2} h_i h_{j+2} L_5(j,i,n)(-1)^n F_n,$$

$$J_8(j,i,n) = \frac{1}{2} h_i h_{j-1} \times (3L_6(j,i,n) - 2L_1(j,i,n))(-1)^n F_n,$$

$$J_9(j,i,n) = \frac{1}{2} h_i h_{j+1} \times (3L_7(j,i,n) - 2L_2(j,i,n))(-1)^n F_n,$$

$$J_{10}^*(j,i,n) = \frac{1}{2} h_i h_j N_{j,q,n}^{(+)} J_1^*(n),$$

$$J_{11}^*(j,i,n) = \frac{1}{2} h_i h_j N_{j,q,n}^{(-)} J_1^*(n).$$